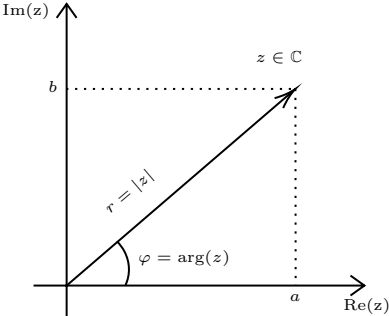
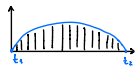
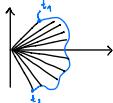
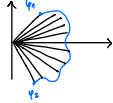
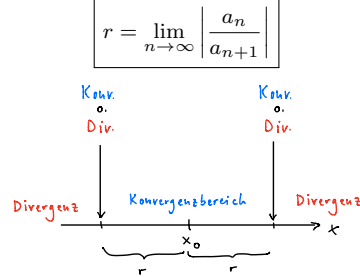


Analysis I Micha Bosshart - bmicha@ethz.ch Funktionen Folgen und Reihen konvergent Es existiert ein Grenzwert sonst divergent. beschränkt Alle Glieder in endlich breitem, waagerechten Parallelstreifen enthalten. monoton wachsend $a_{n+1} \geq a_n$ (strikt: $>$) mon. wachsend/ fallend & beschränkt $\Rightarrow$ konvergent Rechenregeln für konvergente Folgen Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = a/b.$ Gilt auch für Funktionen; sofern Grenzwert existiert. Geometrische Reihe $\sum_{n=0}^k a \cdot q^n = a \cdot \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1 - q}, \quad \text{falls } q < 1$ Arithmetische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} [a_1 + (n - 1) \cdot d] = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$ Good to Know $\triangleright \sum_{n=1}^k n = \frac{k \cdot (k + 1)}{2}$ $\triangleright \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ $\triangleright \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty, \text{ (harm. Reihe)}$ Grenzwerte Bernoulli de L'Hôpital Falls $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (oder $\pm \infty$), so gilt $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$ Landau Symbol $f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \rightarrow a \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \rightarrow a \iff \lim_{x \rightarrow a} \left \frac{f(x)}{g(x)} \right \leq A \in \mathbb{R}$ Es gilt: $x^k = o(e^x) \quad \text{für } x \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{R}$ $\ln(x) = o(x^k) \quad \text{für } x \rightarrow \infty, \quad k > 0$		Page 1 of 9 Eigenschaften Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ ist eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ ein Element $f(x) \in B$ zuordnet, $f : x \rightarrow f(x)$. Definitionsbereich: $D(f) = A$ Zielbereich: $Z(f) = B$ Wertebereich: $W(f) = \{f(x) \mid x \in D(f)\}$ Surjektiv Jeder Wert im Zielbereich $Z(f)$ wird angenommen. $W(f) = Z(f)$ Injektiv Jede Horizontale schneidet den Graphen $\Gamma(f)$ höchstens einmal. $\triangleright f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, sonst nicht injektiv Bijektiv Injektiv & Surjektiv $\Leftrightarrow$ Bijektiv $\Leftrightarrow$ Umkehrbar Inverse Funktion Sei $f(x)$ eine Funktion von $D(f)$ nach $W(f)$, dann ist $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$ mit $y \mapsto f^{-1}(y)$ die inverse Funktion von $f(x)$. $\triangleright W(f^{-1}) = D(f)$ $\triangleright D(f^{-1}) = W(f)$ Gerade & Ungerade gerade: $f(-x) = f(x)$ ungerade: $f(-x) = -f(x)$ Stetigkeit $f(x)$ ist stetig im Punkt ξ falls $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x).$ $\triangleright$ Bei Lücken in $D(f)$ werden die einzelnen Abschnitte separat betrachtet. Monotonie (Strikt) Monoton Steigend $\triangleright x_1 < x_2 \iff f(x_1) \leq f(x_2)$ (strikt: $<$) $\triangleright f'(x) \geq 0$ (strikt: $>$) (Strikt) Monoton Fallend $\triangleright x_1 < x_2 \iff f(x_1) \geq f(x_2)$ (strikt: $>$) $\triangleright f'(x) \leq 0$ (strikt: $<$) Beschränktheit Alle Funktionswerte sind in einem endlich breiten waagerechten Parallelstreifen enthalten. Asymptoten Wir nennen eine Funktion $g(x)$ eine Asymptote von $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ falls $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0.$		Hyperbolische Funktionen $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ $\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$ $\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$ $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$ Inverse Funktionen $\cosh(x)^{-1} = \text{Arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ $\sinh(x)^{-1} = \text{Arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ $\tanh(x)^{-1} = \text{Artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$ Komplexe Zahlen  $z = \underbrace{a + ib}_{\text{kartesisch}} = \underbrace{r \cos(\varphi) + ir \sin(\varphi)}_{\text{Polarform}} = \underbrace{r \cdot e^{i\varphi}}_{\text{Euler}}$ Nullstellen Reeller Polynome mit Grad n $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R}$ $\triangleright$ Hat genau n Nullstellen (komplex und reell) $\triangleright$ Komplexe Nullstellen kommen immer im komplex-konjugierten Paar vor. Differentialrechnung Ableitung Inverse Funktion $(f^{-1})'(x_o) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_o))}$ Tangenten Explizit $t(x) = f(x_o) + f'(x_o) \cdot (x - x_o)$		January 19, 2023 Eine Tangente $t(x)$ an die Funktion $f(x)$ im Punkt x_o, erfüllt folgende Bedingungen: $t'(x_o) \stackrel{!}{=} f'(x_o),$ $t(x_o) \stackrel{!}{=} f(x_o).$ Parametrisiert Tangente $\vec{t}(s)$ an die Parametrisierung $\vec{r}(t)$ im Punkt t_o. $\vec{t}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \vec{r}(t_o) + s \cdot \dot{\vec{r}}(t_o)$ Fehlerrechnung Die berechnete Grösse f ist abhängig von der gemessenen Grösse x. Die gemessene Grösse weicht mit dem Messfehler Δx von der Realität ab. $\triangleright$ Absoluter Fehler $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f \approx f'(x) \Delta x$ $\triangleright$ Relativer Fehler $\frac{\Delta f}{f}$ Bemerkungen 1% Genauigkeit Messfehler von 1° $\frac{\Delta x}{x} = 1\% = \frac{1}{100}$ $\Delta \alpha = \frac{\pi}{180}$ Evolute $E(t)$ Parametrisierung der Krümmungsmittelpunkte an die Kurve $\vec{r} = (x(t), y(t))^T$. $E(t) = \begin{pmatrix} x_E(t) \\ y_E(t) \end{pmatrix}$ $x_E(t) = x - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}}$ $y_E(t) = y + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}}$ Krümmung $k(t)$ $\triangleright$ Parametrisierung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$ $k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\triangleright$ Explizit $y = f(x)$ $k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$ $\triangleright$ Polarkoordinaten $r = f(\varphi)$ $k(\varphi) = \frac{(f(\varphi))^2 + 2(f'(\varphi))^2 - f(\varphi)f''(\varphi)}{[(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2]^{3/2}}$	
---	--	--	--	--	--	---	--

Analysis I		Page 2 of 4	January 19, 2023
Parametrisierungen Kreis / Ellipse Ellipse mit Mittelpunkt (x_o, y_o) und Halbachsen a & b . <u>implizit:</u> $\left(\frac{x - x_o}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_o}{b}\right)^2 = 1$ <u>parametrisiert:</u> $\begin{aligned} x(t) &= x_o + a \cdot \cos(t) \\ y(t) &= y_o + b \cdot \sin(t) \end{aligned}$	Bogenlänge s ▷ explizit $y = f(x)$ $s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$ ▷ Polarkoordinaten $\rho = \rho(\varphi)$ $s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\varphi$ ▷ Parametrisierung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$ $s = \int_{t_1}^{t_2} \left \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right \, dt$		Rotationsoberflächen <u>Kurve rotiert um x-Achse:</u> $\begin{aligned} O &= \int_{t_1}^{t_2} 2\pi y(t) \cdot \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}_{ds \text{ (Bogenlänge)}} \, dt \\ &= \int_{x_1}^{x_2} 2\pi f(x) \cdot \underbrace{\sqrt{1 + f'(x)^2}}_{ds} \, dx \end{aligned}$ <u>Kurve rotiert um y-Achse:</u> $\begin{aligned} O &= \int_{t_1}^{t_2} 2\pi x(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \, dt \\ &= \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \cdot \underbrace{\sqrt{1 + f'(x)^2}}_{ds} \, dx \end{aligned}$
Normal- und Tangentialvektoren explizit $y = f(x) \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_o) \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} f'(x_o) \\ -1 \end{pmatrix}$	Flächenberechnungen ▷ Parametrisierung $\vec{r} = (x(t), y(t))^T$ $A = \int_{t_1}^{t_2} y \dot{x} \, dt$ 		Potenzreihen FoTaBe S.77 Potenzreihe der Funktion $f(x)$ um den Punkt x_o : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_o)^n$ ▷ Höchstens eine Potenzreihe von f um x_o existiert. ▷ Konvergiert für $ x - x_o < r$
parametrisiert $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$	Sektorfläche Fläche zwischen Ursprung und Kurve ▷ Parametrisierung $A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x \dot{y} - y \dot{x}) \, dt$  ▷ Polarkoordinaten $A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) \, d\varphi$  Fläche auf der linken Seite der Kurve (Durchlaufsinne beachten) hat positives Vorzeichen.		Konvergenzradius r $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_n}{a_{n+1}} \right $ 
Integralrechnung Hauptsatz der Infinitesimalrechnung Für $a \in \mathbb{R}$ $\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) \, dt \right] = f(x)$	Trägheitsmoment / Trägheitsmoment Sei $H(x)$ die Höhe der Fläche a.d.S. x . Sei σ die Flächendichte $[kg/m^2]$. Fläche: $A = \int_{x_1}^{x_2} H(x) \, dx$ Masse: $M = \int_{x_1}^{x_2} \sigma \cdot H(x) \, dx$ Schwerpunkt: $x_s = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \sigma \cdot H(x) \, dx$ Trägheitsmoment: $I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot \sigma \cdot H(x) \, dx$		Innerhalb vom Konvergenzbereich darf man Potenzreihen <i>gliedweise</i> : ▷ addieren & subtrahieren ▷ integrieren & differenzieren
Partialbruchzerlegung 1. Nenner faktorisieren 2. Ansatz 3. Koeffizientenvergleich, Konstanten bestimmen	Trägheitsmoment $\int (\text{Abstand zur Rotationsachse})^2 \cdot (\text{Masse})$		Taylorreihen Taylorentwicklung von $f(x)$ um x_o : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!} (x - x_o)^n$ ▷ ungerade Fkt $\Leftrightarrow$ ungerade Indizes: $a_1x + a_3x^3 + \dots$ ▷ gerade Fkt $\Leftrightarrow$ gerade Indizes: $a_0 + a_2x^2 + \dots$
Ansatz ▷ n-fache reelle Nullstelle: $\frac{(\dots)}{(x - x_o)^n} = \frac{A}{(x - x_o)} + \frac{B}{(x - x_o)^2} + \dots + \frac{Z}{(x - x_o)^n}$ ▷ n-fache komplexe Nullstelle (e.g. $(x^2 + 1)$): $\frac{(\dots)}{(x^2 + 1)^n} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} + \dots + \frac{Yx + Z}{(x^2 + 1)^n}$	Uneigentliche Integrale Konvergiert $\Leftrightarrow$ Grenzwert existiert 1. Gattung Zu integrierende Funktion ist an der Grenze nicht definiert. Bsp.: $\int_0^1 \frac{1}{x} \, dx = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \int_{\xi}^1 \frac{1}{x} \, dx$		Ableitung Un-/Gerader Funktionen ▷ $g(x)$ sei gerade $g'(0) = g^{(3)}(0) = g^{(5)}(0) = \dots = 0$ ▷ $f(x)$ sei ungerade $f''(0) = f^{(4)}(0) = f^{(6)}(0) = \dots = 0$
Partielle Integration Es sei $F'(x) = f(x)$ und $G'(x) = g(x)$, dann gilt $\int_a^b \underset{\uparrow}{G} \cdot \underset{\downarrow}{f} \, dx = G \cdot F \Big _a^b - \int_a^b g \cdot F \, dx.$	Flächenrotation Fläche unter Kurve rotiert um y -Achse: $V = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{2\pi x(t)}_{\text{Umfang}} \cdot \underbrace{y(t)}_{dx} \cdot \underbrace{\dot{x}(t)}_{dy} \, dt = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \cdot f(x) \, dx$		Zykloide P: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} at - b \cdot \sin t \\ a - b \cdot \cos t \end{pmatrix}$
Tangenten: $\vec{T}(s) = \begin{pmatrix} x(t_o) \\ y(t_o) \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} \dot{x}(t_o) \\ \dot{y}(t_o) \end{pmatrix}$	Tricks $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} \, dx \quad \text{konvergiert} \Leftrightarrow \alpha > 1$		Zwiebelkurve $0 \leq t \leq 2\pi$ P: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$
			Kreis P: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_o + R \cdot \cos t \\ y_o + R \cdot \sin t \end{pmatrix}$ l: $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$

Appendix Nullstellen Reeller Polynome mit Grad n

- $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{R}$
- Hat genau n Nullstellen (komplex und reell)
 - Komplexe Nullstellen kommen immer im komplex-konjugierten Paar vor.

Cosinus und Sinus - Integrale

Für $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 2$, gelten:

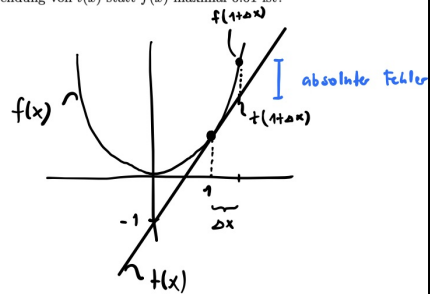
$$\int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) dx$$

$$\int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) dx$$

Diese Regel kann mehrfach angewandt werden.

13. (Fehlerrechnung SC) Die Funktion $f(x) = x^2$ hat an der Stelle $x_0 = 1$ die lineare Ersatzfunktion $t(x) = 2x - 1$. Wie gross darf x höchstens sein, so dass der absolute Fehler durch Verwendung von $t(x)$ statt $f(x)$ maximal 0.01 ist?

- (a) $x = 1 + 10^{-0}$
 (b) $x = 1 + 10^{-1}$
 (c) $x = 1 + 10^{-3}$
 (d) $x = 1 + 10^{-2}$



$$f(1+\delta x) - t(1+\delta x) = 0.01$$

$$(1+\delta x)^2 - [2(1+\delta x) - 1] = 0.01$$

$$1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \delta x + \delta x^2 - [2 + 2\delta x - 1] = 0.01$$

$$\delta x^2 = 0.01 = 10^{-2}$$

$$|\delta x| = (10^{-2})^{1/2} = 10^{-1}$$

1 Koordinatentransformationen 113/114

	Kartesisch	Zylindrisch	Sphärisch
x	x	$\rho \cos \varphi$	$r \sin \theta \cos \psi$
y	y	$\rho \sin \varphi$	$r \sin \theta \sin \psi$
z	z	z	$r \cos \theta$
ρ	$\sqrt{x^2 + y^2}$	ρ	$r \sin \theta$
φ	$\arctan \frac{y}{x}$	φ	ψ
z	z	z	$r \cos \theta$
r	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\sqrt{\rho^2 + z^2}$	r
θ	$\arccos \frac{z}{r}$	$\arctan \frac{\rho}{z}$	θ
ψ	$\arctan \frac{y}{x}$	φ	ψ

2. [6 Punkte] Man bestimme die ersten drei nicht-verschwindenden Terme der Taylorentwicklung von $f(x) = \tanh(x)$ in $x_0 = 0$.

FoTaBe S. 60

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

FoTaBe S. 79 / oder zF

$$\left[e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right] \rightarrow e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n!} = e^{-x} \right]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 + (-1)^{n+1}}{n!} \right) \cdot x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 + (-1)^n}{n!} \right) x^n}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 + (-1)^{n+1}}{n!} \right) x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 + (-1)^{n+1}}{n!} \right) x^n$$

$$\left(\cancel{a_0} + a_1x + \cancel{a_2x^2} + \cancel{a_3x^3} + \cancel{a_4x^4} + a_5x^5 + \dots \right)$$

$$\left(2 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{4!}x^4 + \frac{2}{6!}x^6 + \dots \right)$$

=

$$\left(\frac{2}{1!}x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{2}{5!}x^5 + \frac{2}{7!}x^7 + \frac{2}{9!}x^9 + \dots \right)$$

$$(a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \dots) \cdot \left(2 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{4!}x^4 + \frac{2}{6!}x^6 + \dots \right) = \left(2x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{2}{5!}x^5 + \frac{2}{7!}x^7 + \dots \right)$$

Koeffizientenvergleich:

$$x^0:$$

$$x^1: a_1 \cdot 2$$

$$x^2:$$

$$x^3: 2a_3 + \frac{2}{2!}a_1$$

$$x^4:$$

$$x^5: a_1 \cdot \frac{2}{4!} + a_3 \cdot \frac{2}{2!} + 2a_5$$

$$\frac{2}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{2} + 2 \cdot a_5 = \frac{2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$0 = 0$$

$$= 2 \rightarrow \boxed{a_1 = 1}$$

$$0 = 0$$

$$= \frac{2}{3!} \rightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{3}}$$

$$0 = 0$$

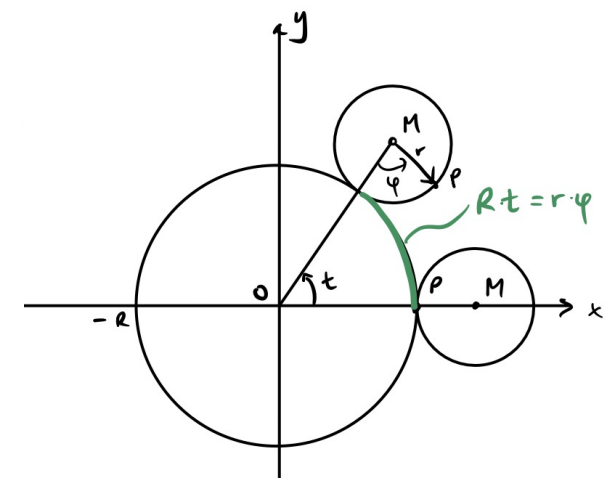
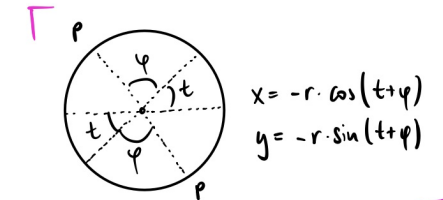
$$= \frac{2}{5!} \rightarrow \boxed{a_5 = \frac{2}{15}}$$

Epizykloide:

$$\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP}$$

$$\rightarrow \vec{OM} = \begin{pmatrix} (R+r) \cos(t) \\ (R+r) \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{MP} = \begin{pmatrix} -r \cdot \cos(t+\varphi) \\ -r \sin(t+\varphi) \end{pmatrix}$$



Abrollbedingung: $R \cdot t = \varphi \cdot r \rightarrow \varphi = \frac{R}{r} t$

$$\rightarrow t + \varphi = \left(1 + \frac{R}{r}\right) t$$

$$\vec{OP}(t) = \begin{pmatrix} (R+r) \cos(t) - r \cdot \cos\left(\left(1 + \frac{R}{r}\right)t\right) \\ (R+r) \sin(t) - r \sin\left(\left(1 + \frac{R}{r}\right)t\right) \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots \rightarrow \text{konvergiert f\"ur } |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x^2)^n = 1 - 2x^2 + 4x^4 - \dots \rightarrow \text{konvergiert f\"ur } |-2x^2| < 1 \rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{5-x} = \frac{1/5}{1-x/5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-(x/5)} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n \rightarrow \text{konvergiert f\"ur } \left|\frac{x}{5}\right| < 1 \rightarrow |x| < 5$$

$$\frac{x^2}{5-x} = x^2 \cdot \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} x^{n+2}$$

$$\rightarrow i = n+2 \quad \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{i-1} \cdot x^i$$

Tabelle:

$$\triangleright e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\triangleright \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\leadsto e^x \cdot \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^n}{n!} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] = \dots$$

$$\leadsto e^x \cdot \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \neq \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^n}{n!} \cdot (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$$

$$\int g'(x) \cdot f(g(x)) dx = F(g(x)) + c$$

Bsp.

Bestimme die ersten vier Koeffizienten der Potenzreihe von

$$\frac{\sin(x)}{e^x} \text{ um das Zentrum } x_0 = 0.$$

$$\frac{\sin(x)}{e^x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\sin(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) \cdot e^x$$

$$\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)$$

$$x^0: \quad 0 = a_0 \rightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$x^1: \quad 1 = a_0 + a_1 \rightarrow \boxed{a_1 = 1}$$

$$x^2: \quad 0 = a_0 \cdot \frac{1}{2!} + a_1 + a_2 \rightarrow \boxed{a_2 = -1}$$

$$x^3: \quad -\frac{1}{3!} = a_0 \cdot \frac{1}{3!} + a_1 \cdot \frac{1}{2!} + a_2 + a_3 \rightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{3}}$$

$$\triangleright \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{falls } |x| < 1 \quad \text{konvergiert}$$

$$\triangleright \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergent} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

$$\triangleright e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\triangleright e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$\leadsto$ Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcosh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ \operatorname{Arsinh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ \operatorname{Artanh}(x) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \operatorname{Arcosh} \\ \operatorname{Arsinh} \\ \operatorname{Artanh} \end{array} \right\} = x$$

Bsp.

$$\int_0^x \sqrt{1-t^3} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

Ges: $a_0, \dots, a_7$

$$\hookrightarrow a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_7 x^7$$

$$\rightarrow \text{Tabelle: } \sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \dots$$

$$\sqrt{1+(-t^3)} = 1 - \frac{t^3}{2} - \frac{t^6}{8} - \dots$$

$$\int_0^x \left(1 - \frac{t^3}{2} - \frac{t^6}{8} - \dots\right) dt = \left[t - \frac{t^4}{8} - \frac{t^7}{56} - \dots\right]_0^x = x - \frac{x^4}{8} - \frac{x^7}{56} - \dots$$

$$\rightarrow a_0 = a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = 0$$

$$a_1 = 1 \quad a_4 = -\frac{1}{8} \quad a_7 = -\frac{1}{56}$$