Serie 10 · Aufgabe 1a–b

Ziel: Berechnung von Stammfunktionen mit verschiedenen Methoden

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a. (♡) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+3}$

Hinweis: Substituieren Sie $u = x^2$

Lösung:

a. Mit der Substitution $u = x^2$ gilt $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$, oder auch $x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$. Daher haben wir

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+3} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{3((\frac{u}{\sqrt{3}})^2+1)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}u}{(\frac{u}{\sqrt{3}})^2+1}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x^2\right) + C.$$

Im letzten Schritt haben wir dabei $u = x^2$ rücksubstituiert.

b. (♡) $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh x}\,\mathrm{d}x$

Hinweis: Substituieren Sie $u = e^x$.

Lösung:

b. Einsetzen der Definition von $\cosh x$ liefert

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}}.$$

Nun bietet sich die Substitution $u = e^x$ an, also gilt $x = \ln u$ und damit $\mathrm{d}x = \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$. Es folgt

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{u\,(u+u^{-1})} = \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2+1} = 2\arctan u + C = 2\arctan(e^x) + C.$$

Variante: Wir erweitern mit $\cosh x$ und benutzen die Identität $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} = \int \frac{\cosh x}{\cosh^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cosh x}{1+\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Nun substituieren wir $u = \sinh x$, d. h. $\mathrm{d}u = \cosh x\,\mathrm{d}x$. Also

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \arctan(u) + D = \arctan(\sinh x) + D.$$

Diese beiden Stammfunktionen $2\arctan(e^x)$ und $\arctan(\sinh x)$ von $\frac{1}{\cosh x}$ unterscheiden sich tatsächlich nur um eine Konstante (um $\frac{\pi}{2}$). Direkt ist das aber nicht ganz einfach zu zeigen, am einfachsten ist tatsächlich der Weg über die gleiche Ableitung.

Serie 10 · Aufgabe 1c–d

Ziel: Berechnung von Stammfunktionen mit verschiedenen Methoden

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

c. (♡) $\displaystyle\int_3^4 x^3 \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$

Lösung:

c. Es sei $t = x^2$. Dann ist $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$, $t(3) = 9$ und $t(4) = 16$. Somit ist

$$\int_3^4 x^3 \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_9^{16} t\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nun verwenden wir partielle Integration mit $u(t) = t$ und $v'(t) = \cos(t)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[\,t\sin(t)\,]_9^{16} - \frac{1}{2}\int_9^{16}\sin(t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad= \frac{1}{2}\big(16\sin(16) - 9\sin(9)\big) + \frac{1}{2}[\cos(t)]_9^{16} \\
&\quad= \frac{1}{2}\big(16\sin(16) - 9\sin(9) + \cos(16) - \cos(9)\big).
\end{aligned}$$

d. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{e^x - 1}}$

Hinweis: Substituieren Sie $u^2 = e^x - 1$.

Lösung:

d. Wir substituieren $u^2 = e^x - 1$. Dann ist $2u\,\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x = (u^2+1)\,\mathrm{d}x$.

$$\Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{e^x-1}} = \int \frac{2u\,\mathrm{d}u}{2(1+u^2)\,u} = \arctan u + C = \arctan\sqrt{e^x-1} + C$$

Serie 10 · Aufgabe 1e

Ziel: Berechnung von Stammfunktionen mit verschiedenen Methoden

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

e. $\displaystyle\int_0^{1/4} \frac{\arcsin\left(\sqrt{1-4x^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Hinweis: Substituieren Sie $2x = \cos u$.

Lösung:

e. Im Kapitel über die Umkehrfunktion haben wir gesehen, dass $\arcsin(\sin u) = u$ gilt für $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Weiter gilt $\sin u = \sqrt{1-\cos^2 u}$. Diese Beziehungen können wir offenbar mit der Substitution $2x = \cos u$ ausnutzen; also gilt $2\,\mathrm{d}x = -\sin u\,\mathrm{d}u$. Ausserdem ist die Funktion $x(u) = \frac{1}{2}\cos u$ für $u \in [0, \pi]$ invertierbar, nämlich $u = \arccos(2x)$. Wir transformieren die Grenzen:

$$x = 0 \Rightarrow u = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad x = \frac{1}{4} \Rightarrow u = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{1/4} \frac{\arcsin\sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^{1/4} \frac{\arcsin\sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{\arcsin(\sin u)}{\sin u}\sin u\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\pi/3}^{\pi/2} u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{5}{72}\pi^2.\end{aligned}$$

Serie 10 · Aufgabe 1f

Ziel: Berechnung von Stammfunktionen mit verschiedenen Methoden

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

f. (♡) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3+x^2-x-1}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

f. Durch Ausprobieren finden wir, dass 1 eine Nullstelle des Nenners ist. Mit Polynomdivision ergibt sich $(x^3+x^2-x-1)/(x-1) = x^2+2x+1$, was das Quadrat von $x+1$ ist. Also faktorisieren wir $x^3+x^2-x-1 = (x-1)(x+1)^2$.

Der Ansatz der Partialbruchzerlegung ergibt

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^3+x^2-x-1} &= \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} \overset{!}{=} \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}\\ &= \frac{(A+C)x^2+(B+2C)x+(-A-B+C)}{(x-1)(x+1)^2}.\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $A=-\frac{1}{4}$, $B=\frac{1}{2}$ und $C=\frac{1}{4}$. Somit ist

$$\begin{aligned}&\int \frac{x}{x^3+x^2-x-1}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+C\\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+C = \ln\left(\sqrt[4]{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+C.\end{aligned}$$

Serie 10 · Aufgabe 1g–h

Ziel: Berechnung von Stammfunktionen mit verschiedenen Methoden

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

g. $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$

Hinweis: Das Polynom x^2+1 ist ein Faktor des Nenners.

Lösung:

g. Da x^2+1 das Nennerpolynom teilt, erhalten wir durch Polynomdivision $(x^4+2x^3+3x^2+2x+2)/(x^2+1) = (x^2+2x+2)$. Das Polynom x^2+2x+2 hat keine reellen Nullstellen, wir betrachten daher als Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}\frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} &\overset{!}{=} \frac{Ax+C}{x^2+1}+\frac{Bx+D}{x^2+2x+2}\\ &= \frac{(A+B)x^3+(2A+C+D)x^2+(2A+B+2C)x+2C+D}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}.\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $A=2$, $B=C=0$ und $D=1$. Also

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x+\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x\\ &= \ln|x^2+1|+\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \ln(x^2+1)+\arctan(x+1)+C.\end{aligned}$$

h. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^4+2x^2}\,\mathrm{d}x$

Weitere Übungen dieser Form finden Sie auch im Integral-Trainer!

Lösung:

h. Zunächst gilt $x^4+2x^2 = x^2(x^2+2)$, und x^2+2 hat keine reellen Nullstellen. Wir setzen also

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x^2(x^2+2)} &\overset{!}{=} \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2}\\ &= \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+2Ax+2B}{x^2(x^2+2)},\end{aligned}$$

woraus folgt: $A=\frac{1}{2}$, $B=1$, $C=-\frac{1}{2}$ und $D=-1$. Somit

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2(x^2+2)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x+\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \frac{x+2}{x^2+2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x-\int \frac{1}{x^2+2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\ln(x^2+2)-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C.\end{aligned}$$

Serie 10 · Aufgabe 2

Ziel: Anwendung des Integrals zur Flächenberechnung, Umsetzung geometrischer Beschreibung

Bestimmen Sie die Menge aller Parabeln der Form $y = -ax^2 + b$, $a > 0$, $b > 0$, welche mit der x-Achse die Fläche $\frac{4}{3}$ einschliessen.

Lösung:

Die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse sind durch die Nullstellen von $-ax^2 + b$ gegeben, nämlich $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Da die Fläche unter der Parabel achsensymmetrisch ist (bzw. gleichbedeutend weil $-ax^2 + b$ gerade ist), können wir von 0 bis zur oberen Grenze integrieren, und erhalten

$$\begin{aligned} F(a,b) &= 2\int_0^{\sqrt{b/a}} (-ax^2 + b)\,\mathrm{d}x = 2\left[-\frac{a}{3}x^3 + bx\right]_0^{\sqrt{b/a}} \\ &= 2\left(-\frac{a}{3}\frac{b^{3/2}}{a^{3/2}} + b\frac{b^{1/2}}{a^{1/2}}\right) = \frac{4}{3}\frac{b^{3/2}}{a^{1/2}}. \end{aligned}$$

Es gilt $F(a,b) = \frac{4}{3}$ genau dann, wenn $a = b^3$. Somit ist die gesuchte Schar gegeben durch

$$f(x) = -b^3x^2 + b,\ b > 0.$$

Serie 10 · Aufgabe 3a–c

Ziel: Integrationstechniken üben, Nachweisen von Rekursionsformeln, komplizierter Grenzwert

Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Rekursionsformel für das Integral

$$I_n = \int_1^e \ln(x)^n \, \mathrm{d}x, \qquad n \geq 0$$

zu finden.

a. (♡) Berechnen Sie die ersten zwei Integrale I_0 und I_1.

Lösung:

a. Es gilt

$$I_0 = \int_1^e \ln(x)^0 \, \mathrm{d}x = \int_1^e 1 \, \mathrm{d}x = e - 1$$

und mittels partieller integration

$$I_1 = \int_1^e \ln(x) \, \mathrm{d}x = \int_1^e 1 \cdot \ln(x) \, \mathrm{d}x = [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = 1.$$

b. Finden Sie eine Rekursionsformel für I_n. Benutzen Sie hierfür partielle Integration.

Lösung:

b. Es sei $n \geq 2$. Wir berechnen mit partieller Integration

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^e \ln(x) \ln(x)^{n-1} \, \mathrm{d}x \\ &= [x(\ln(x) - 1) \ln(x)^{n-1}]_1^e - \int_1^e x(\ln(x) - 1)(n-1) \ln(x)^{n-2} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\ &= 0 - (n-1) \int_1^e (\ln(x) - 1) \ln(x)^{n-2} \, \mathrm{d}x = (n-1)(I_{n-2} - I_{n-1}). \end{aligned}$$

Also ist für $n \geq 2$:

$$I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_{n-1})$$

Hinweis: Man kann dies noch etwas vereinfachen: Wenn man auf beiden Seiten nI_{n-1} addiert erhält man:

$$I_n + nI_{n-1} = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}.$$

Die rechte Seite ist erhalten aus der linken Seite durch Ersetzen von n mit $n-1$. Man kann diese Gleichung also wiederum auf die rechte Seite anwenden und erhält nach n Wiederholungen:

$$I_n + nI_{n-1} = I_1 + I_0 = e.$$

Also:

$$I_n = e - nI_{n-1}.$$

c. Verwenden Sie die gefundene Rekursionsformel von I_n um I_5 zu berechnen.

Lösung:

c. Durch sukzessives Einsetzen erhält man

$$\begin{aligned} I_5 &= e - 5 \cdot I_4 = e - 5 \cdot (e - 4 \cdot I_3) = -4e + 20 \cdot (e - 3 \cdot I_2) \\ &= 16e - 60 \cdot (2 - I_1) = -44e + 120. \end{aligned}$$

Serie 10 · Aufgabe 3d

Ziel: Integrationstechniken üben, Nachweisen von Rekursionsformeln, komplizierter Grenzwert

Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Rekursionsformel für das Integral

$$I_n = \int_1^e \ln(x)^n \, \mathrm{d}x, \qquad n \geq 0$$

zu finden.

d. ($\star$) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Hinweis: Es sei $\epsilon > 0$. Benutzen Sie unter anderem

$$I_n = \int_1^{e-\epsilon} \ln(x)^n \, \mathrm{d}x + \int_{e-\epsilon}^e \ln(x)^n \, \mathrm{d}x$$

und $\ln(x) < 1$ für alle $x \in [1, e)$ um zu zeigen, dass $\lim_{n\to+\infty} I_n \leq \epsilon$.

Lösung:

d. Mit dem Hinweis berechnen wir

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^{e-\epsilon} \ln(x)^n \, \mathrm{d}x + \int_{e-\epsilon}^e \ln(x)^n \, \mathrm{d}x \\ &\leq \int_1^{e-\epsilon} \ln(e-\epsilon)^n \, \mathrm{d}x + \int_{e-\epsilon}^e \ln(e)^n \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Um die Abschätzung zu zeigen, haben wir benutzt, dass ln monoton steigend ist und deshalb $\ln(x)^n \leq \ln(e-\epsilon)^n$ für alle $x \in [1, e-\epsilon]$ und $\ln(x)^n \leq \ln(e)^n$ für alle $x \in [e-\epsilon, e]$. Wir haben also

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} I_n &\leq \lim_{n\to+\infty} \int_1^{e-\epsilon} \ln(e-\epsilon)^n + \lim_{n\to+\infty} \int_{e-\epsilon}^e \ln(e)^n \\ &= \lim_{n\to+\infty} \ln(e-\epsilon)^n \int_1^{e-\epsilon} 1 \, \mathrm{d}x + \lim_{n\to+\infty} \ln(e)^n \int_{e-\epsilon}^e 1 \, \mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to+\infty} \ln(e-\epsilon)^n (e-\epsilon-1) + \lim_{n\to+\infty} 1^n \epsilon = 0 \cdot (e-\epsilon-1) + \epsilon. \end{aligned}$$

Bei der obigen Rechnung haben wir benutzt, dass $\ln(e-\epsilon) < 1$. Wir konnten also zeigen, dass

$$\lim_{n\to+\infty} I_n \leq \epsilon$$

für alle $\epsilon > 0$. Und deshalb folgt, dass

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0,$$

weil wir ja $\epsilon > 0$ beliebig klein wählen können (und $I_n \geq 0$ für alle $n \geq 0$).

Bemerkung: (Zusammenhang zu fixpunktfreien Bijektionen, nicht prüfungsrelevant). Es gilt

$$I_n = (-1)^n (a_n e - n!)$$

für alle $n \geq 0$, wobei die Folge a_n die Rekursionsgleichung $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}),\ n \geq 2$ mit $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ erfüllt. (Dies lässt sich Nachrechnen).

Es lässt sich zeigen, dass a_n genau der Anzahl fixpunktfreier Bijektionen auf einer n-punktigen Menge entspricht. Fixpunktfrei heisst, dass es keinen Punkt gibt der auf sich selbst abgebildet wird. Mehr dazu kann man auf Wikipedia nachlesen.

Es gilt also

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \left(\frac{a_n e}{n!} - 1 \right)$$

und somit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n!} = \frac{1}{e}.$$

Da eine n-punktige Menge genau $n!$ verschiedene Bijektionen zulässt, haben wir gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeit zufällig eine fixpunktfreie Bijektion einer n-punktigen Menge auszuwählen für grosse n ungefähr $\frac{1}{e}$ beträgt.