Serie 9 · Aufgabe 1a–b

Aufgabe 1

Ziele: Krümmung parametrisiert berechnen, Zentrum des Krümmungskreises für einen speziellen Wert bestimmen

Gegeben ist die Parametrisierung der Kettenlinie

$$\vec{\gamma} : t \mapsto (t, \cosh t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a. (❤️) Bestimmen Sie die Krümmungsfunktion $t \mapsto k(t)$ der Kurve $\vec{\gamma}$.

b. (❤️) Finden Sie das Zentrum des Krümmungskreises am Punkt $t = 0$.

Lösung:

a. Definiert man $(x(t), y(t)) := (t,\ \cosh t) = \vec{\gamma}(t)$, so kann man die Krümmung durch die folgende Formel bestimmen:

$$k(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\left(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\right)^{3/2}}.$$

Wir haben $\dot{\vec{\gamma}}(t) = (1,\ \sinh t)$ und $\ddot{\vec{\gamma}}(t) = (0,\ \cosh t)$. Dann ist

$$k(t) = \frac{\cosh t - 0}{\left(1 + \sinh^2 t\right)^{3/2}} = \frac{\cosh t}{\left(\cosh^2 t\right)^{3/2}} = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

b. Das Zentrum des Krümmungskreises am Punkt t ist durch

$$C(t) = \vec{\gamma}(t) + \frac{\vec{n}(t)}{|\vec{n}(t)|} \cdot \frac{1}{k(t)}$$

gegeben, wobei $k(t)$ die Krümmung von $\vec{\gamma}$ am Punkt $\vec{\gamma}(t)$, und $\vec{n}(t)$ der Normalenvektor der Kurve $\vec{\gamma}$ am Punkt $\vec{\gamma}(t)$ ist. Wir haben

$$\frac{1}{k(t)} = \cosh^2 t$$

und

$$\frac{\vec{n}(t)}{|\vec{n}(t)|} = \frac{(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{x}(t)^2}} = \frac{1}{\cosh(t)}(-\sinh t, 1),$$

also haben wir

$$C(0) = (0, 1) + (0, 1) = (0, 2).$$

Serie 9 · Aufgabe 2a

Aufgabe 2

Die Abgabe zu dieser Aufgabe wird von den Hilfsassistierenden korrigiert.

Ziele: Geometrisch spezielle Punkte einer Kurve sowie deren Tangenten bestimmen, Zentrum des Krümmungskreises für ausgewiesenen Punkt bestimmen, Kurve skizzieren

In dieser Aufgabe lernen wir die **Kardioide** kennen. Sie entsteht beispielsweise als Kaustik in Tassen und Gläsern, wenn an der Wand gebrochenes Licht einer Punktquelle sich an gewissen Stellen der Flüssigkeitsoberfläche bündelt.

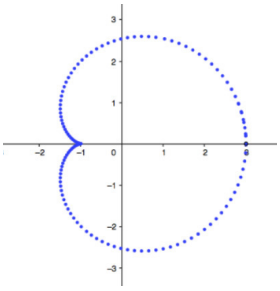
Die Kardioide K ist gegeben durch die Parametrisierung

$$x(t) := 2\cos t + \cos 2t, \quad y(t) := 2\sin t + \sin 2t \qquad t \in [0, 2\pi].$$

a. (❤️) Skizzieren Sie die Kurve anhand von Achsenabschnittspunkten, deren Tangenten, sowie Punkten, wo die Tangente horizontal oder vertikal liegt.

Lösung:

a.
- **Schnittpunkte mit der x-Achse**: es muss $y(t) = 0$ gelten. Mit der Formel $\sin 2t = 2\sin t \cos t$ erhalten wir
$$y(t) = 0 \quad \Leftrightarrow 2\sin t(1 + \cos t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \text{ oder } t = \pi.$$
Die Steigung der Tangente im Punkt $(x(t), y(t))$ ist
$$\frac{\dot y(t)}{\dot x(t)} = -\frac{\cos t + \cos 2t}{\sin t + \sin 2t}.$$
Für $t = 0$ haben wir: $x(t) = 3$ und die Steigung ist $+\infty$, das heisst: die Tangente im Punkt $(3, 0)$ ist eine vertikale Gerade.\ Wir haben $x(\pi) = -1$ und für $t \to \pi$ gilt es:
$$\lim_{t\to\pi} \frac{\dot y(t)}{\dot x(t)} \overset{\text{B-H}}{=} \lim_{t\to\pi} \frac{\sin t + 2\sin 2t}{\cos t + 2\cos 2t} = 0.$$
Also die Tangente im Punkt $(-1, 0)$ ist eine horizontale Gerade.
- **Schnittpunkte mit der y-Achse**: es muss $x(t) = 0$ gelten. Mit der Formel $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$ erhalten wir
$$x(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos^2 t + 2\cos t - 1 = 0 \quad 2u^2 + 2u - 1 = 0,$$
wobei wir die Substitution $u = \cos t$ benutzt haben. Diese Gleichung hat Lösungen $u_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. Da $u = \cos t \geq -1$ und $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < -1$, haben wir nur die Lösung $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Es gibt zwei Zahlen $t \in [0, 2\pi]$ für die $\cos(t) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Nämlich $t_1 = \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ und $t_2 = 2\pi - t_1$. Es gilt:
$$y(t_1) \approx 2.55 \quad y(t_2) \approx -2.55,$$
und die Steigungen der Tangenten sind
$$\frac{\dot y(t_1)}{\dot x(t_1)} = \frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3} - 3} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\dot y(t_2)}{\dot x(t_2)} = -\frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3} - 3} < 0.$$
- **Punkte, wo die Tangente eine horizontale Gerade ist**, das heisst ihre Steigung gleich Null ist. Die Tangente kann horizontal sein, nur falls $\dot y(t) = 2\cos t + 2\cos 2t = 0$. Dies gilt für $t = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$. Wir wissen schon, dass für $t = \pi$ die Tangente horizontal ist. Für die andere zwei Punkte gilt $\dot x(t) \neq 0$ und somit ist $\frac{\dot y(t)}{\dot x(t)} = 0$. Also haben wir eine horizontale Tangente in den Punkten
$$\begin{aligned}
&(x(\pi), y(\pi)) = (-1, 0),\\
&\left(x\left(\frac{\pi}{3}\right), y\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right),\\
&\left(x\left(\frac{5\pi}{3}\right), y\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}$$
- **Punkte, wo die Tangente eine vertikale Gerade ist**, das heisst ihre Steigung $+\infty$ ist. Die Tangente kann horizontal sein, nur falls $\dot x(t) = -2\sin t - 2\sin 2t = 0$. Dies gilt für $t = 0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$. Für $t = 0$ wissen wir schon, dass die Tangente vertikal ist und für $t = \pi$, dass die Tangente horizontal ist. Es gilt $\dot y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \dot y\left(\frac{4\pi}{3}\right) \neq 0$ und somit ist $\frac{\dot y(t)}{\dot x(t)} = \infty$. Also haben wir eine vertikale Tangente in den Punkten
$$\begin{aligned}
&(x(0), y(0)) = (3, 0)\\
&\left(x\left(\frac{2\pi}{3}\right), y\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\\
&\left(x\left(\frac{4\pi}{3}\right), y\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}$$



Mit diesen Eigenschaften, kann man die Kurve skizzieren.

Serie 9 · Aufgabe 2b

Aufgabe 2

Die Abgabe zu dieser Aufgabe wird von den Hilfsassistierenden korrigiert.

Ziele: Geometrisch spezielle Punkte einer Kurve sowie deren Tangenten bestimmen, Zentrum des Krümmungskreises für ausgewiesenen Punkt bestimmen, Kurve skizzieren

In dieser Aufgabe lernen wir die **Kardioide** kennen. Sie entsteht beispielsweise als Kaustik in Tassen und Gläsern, wenn an der Wand gebrochenes Licht einer Punktquelle sich an gewissen Stellen der Flüssigkeitsoberfläche bündelt.

Die Kardioide K ist gegeben durch die Parametrisierung

$$x(t) := 2\cos t + \cos 2t, \quad y(t) := 2\sin t + \sin 2t \qquad t \in [0, 2\pi].$$

b. (❤️) Finden Sie das Zentrum des Krümmungskreises am Punkt $t = \frac{\pi}{2}$.

Lösung:

b. Für eine ebene Kurve mit der Parameterdarstellung $(x(t), y(t))$ kann man die Krümmung durch die folgende Formel bestimmen:

$$k(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\left(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\right)^{3/2}}.$$

In unserem Fall sind

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos(2t) \\ 2\sin t + \sin(2t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin t - 2\sin(2t) \\ 2\cos t + 2\cos(2t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cos t - 4\cos(2t) \\ -2\sin t - 4\sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Rechnen wir zuerst

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 &= (-2\sin t - 2\sin(2t))^2 + (2\cos t + 2\cos(2t))^2 \\ &= 4 + 4 + 8(\sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t)) \\ &= 8(1 + \sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t)). \end{aligned}$$

Daher kriegen wir

$$k(t) = \frac{12(1 + \sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t))}{8^{\frac{3}{2}}(1 + \sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{3\sqrt{2}}{8(1 + \sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t))^{\frac{1}{2}}} = \frac{3\sqrt{2}}{8(\cos(t) + 1)^{\frac{1}{2}}},$$

wobei haben wir benutzt, dass $\sin(2t) = 2\sin t \cos t$ und $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$. Der Normalenvektor $\vec{n}(t)$ der Kurve $\vec{\gamma}$ am Punkt $\vec{\gamma}(t)$ ist

$$\vec{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{8(1 + \cos(t))}} \cdot (-2\cos(t) - 2\cos(2t), -2\sin(t) - 2\sin(2t))$$

Da das Zentrum des Krümmungskreis

$$C(t) = \vec{\gamma}(t) + \frac{\vec{n}(t)}{k(t)}$$

ist, für $t = \frac{\pi}{2}$ haben wir

$$C(\pi/2) = (-1, 2) + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Serie 9 · Aufgabe 2c

Aufgabe 2

Die Abgabe zu dieser Aufgabe wird von den Hilfsassistierenden korrigiert.

Ziele: Geometrisch spezielle Punkte einer Kurve sowie deren Tangenten bestimmen, Zentrum des Krümmungskreises für ausgewiesenen Punkt bestimmen, Kurve skizzieren

In dieser Aufgabe lernen wir die **Kardioide** kennen. Sie entsteht beispielsweise als Kaustik in Tassen und Gläsern, wenn an der Wand gebrochenes Licht einer Punktquelle sich an gewissen Stellen der Flüssigkeitsoberfläche bündelt.

Die Kardioide K ist gegeben durch die Parametrisierung

$$x(t) := 2\cos t + \cos 2t, \quad y(t) := 2\sin t + \sin 2t \qquad t \in [0, 2\pi].$$

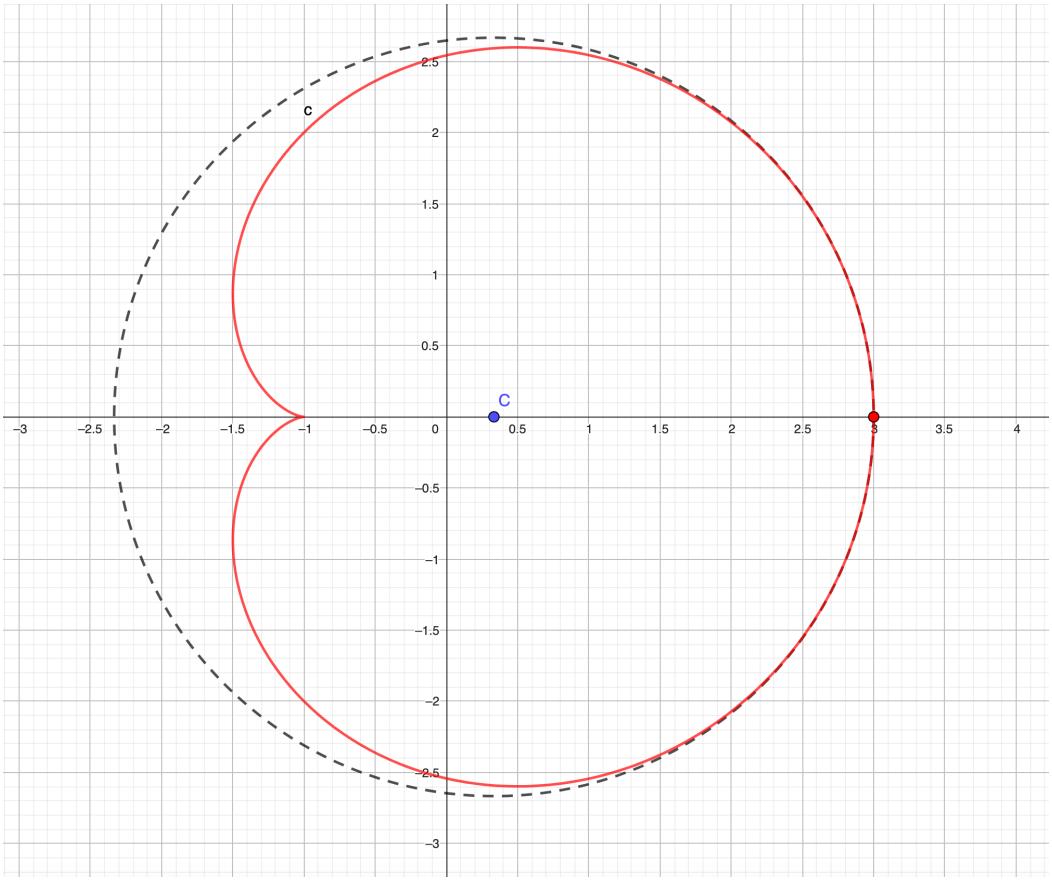
c. Skizzieren Sie die Kurve und ihren Krümmungskreis bei $t = 0$.

Lösung:

c. Um die Kurve und den Krümmungskreis für $t = 0$ zu skizzieren, berechnen wir zunächst den Mittelpunkt des Krümmungskreis:

$$C(0) = (3, 0) + \frac{8}{3}(-1, 0) = \left(\frac{1}{3}, 0\right).$$

Wir haben



Serie 9 · Aufgabe 3a–b

Aufgabe 3

Ziele: Kurven in Polarkoordinaten betrachten, Schnittpunkt und Tangenten bestimmen

Die beiden in Polarkoordinaten (r, φ) gegebenen Kurven

$$K_1 \quad : \quad r \quad = \quad \sin^2 \varphi$$
$$K_2 \quad : \quad r \quad = \quad \tfrac{1}{2}|\sin(2\varphi)|$$

schneiden sich für $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ in einem Punkt P.

a. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts P.

b. Bestimmen Sie die die Gleichung der Tangente t_1 im Punkt P an die Kurve K_1

a. Berechnung des Schnittpunktes der Kurven K_1 und K_2: Es ist die Gleichung

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}|\sin(2\varphi)| \qquad (1)$$

mit $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ zu Lösen.

Für $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt $\sin(2\varphi) > 0$, wir können die Betragsstriche also weglassen. Aus (1) und der Verdoppelungsformel erhalten wir ausserdem $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}\sin(2\varphi) = \sin \varphi \cos \varphi$, also $\sin \varphi = \cos \varphi$ (da $\sin \varphi > 0$ für $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$). Also ist $\varphi = \dfrac{\pi}{4} =: \varphi_0$. Eingesetzt in die Parametrisierung von K_2 ergibt sich $r = \frac{1}{2}$ und damit $P = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

b. Wir schreiben $r_1(\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ und berechnen erst $\dot{r_1}$:

$$\dot{r_1}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\sin\varphi \\ 3\sin^2\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Die Parameterdarstellung der Tangente t_1 an die Kurve K_1 im Punkt P ist gegeben durch:

$$t \mapsto r_1(\varphi_0) + t\dot{r_1}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{3}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Die Parameterdarstellung von t_1 lässt sich auch schreiben als

$$(I) \quad x = \tfrac{\sqrt{2}}{4} + t\tfrac{\sqrt{2}}{4}$$
$$(II) \quad y = \tfrac{\sqrt{2}}{4} + t\tfrac{3\sqrt{2}}{4}$$

Serie 9 · Aufgabe 3c

Aufgabe 3

Ziele: Kurven in Polarkoordinaten betrachten, Schnittpunkt und Tangenten bestimmen

Die beiden in Polarkoordinaten (r, φ) gegebenen Kurven

$$K_1 \quad : \quad r \quad = \quad \sin^2 \varphi$$
$$K_2 \quad : \quad r \quad = \quad \tfrac{1}{2} |\sin(2\varphi)|$$

schneiden sich für $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ in einem Punkt P.

c. Bestimmen Sie von den folgenden 4 Punkten, ob sie auf der Tangente t_1 liegen:

- $P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$
- $P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$
- $P_3 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 4\sqrt{2}\right)$
- $P_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c. Wir eliminieren den Parameter t aus den Gleichungen (Berechne $3 \cdot (I) - (II)$). Dann ist

$$3x - y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

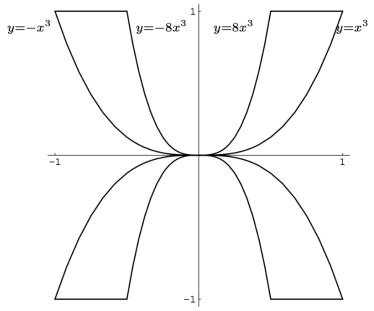
Es lässt sich nun leicht nachprüfen, dass $P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ die Gleichung nicht erfüllt und somit nicht auf t_1 liegt, während die anderen Punkte die Gleichung erfüllen.

Serie 9 · Aufgabe 4

Aufgabe 4

Ziel: Anwendung des Integrals zur Flächenberechnung, Umsetzung von Skizze zur passenden Berechnungsformel

(❤️) Berechnen Sie die Fläche des unten dargestellten x-förmigen Bereichs.



Lösung:

Aus Symmetriegründen gilt für die gesuchte Fläche $F = 4A$, wobei A die Fläche des Bereichs im ersten Quadranten bezeichnet.

Variante 1: Integrieren nach y

Wenn man die Fläche mit Funktionen in y statt wie üblich in x beschreibt, dann ergibt sich A gerade aus der Differenz der Integrale der beiden Funktionen, jeweils von $y = 0$ bis $y = 1$ gerechnet. Für $y = f(x) = x^3$ erhalten wir $x = y^{1/3}$, und für $y = g(x) = 8x^3$ wird $x = \frac{1}{2}\, y^{1/3}$.
Wir erhalten

$$F = 4A = 4 \int_0^1 \left(y^{1/3} - \tfrac{1}{2}\, y^{1/3}\right) dy =$$

$$4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 y^{1/3}\, dy = 2\left[\tfrac{3}{4}\, y^{4/3}\right]_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Dasselbe bekommt man auch, wenn man nach x integriert. Man muss dazu erst berechnen, welches Integral welche Grenze benötigt. Es gilt: $8x^3 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Daher muss als obere Flächenbegrenzung die Funktion $y = 8x^3$ von 0 bis $1/2$ integriert werden, und ab $1/2$ bis 1 dann die konstante 1-Funktion. Davon ziehen wir jeweils als untere Flächenbegrenzen $y = x^3$ ab:

$$F = 4A = 4 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(8x^3 - x^3\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1 - x^3\right) \right) = 4 \left[\left[\frac{7x^4}{4} \right]_0^{1/2} + \left[x - \frac{x^4}{4} \right]_{1/2}^1 \right] = \frac{3}{2}.$$

Variante 2: Aus Integralen in x zusammensetzen

Die Fläche A kann auch aus Integralen von Funktionen in x zusammengesetzt werden. Dazu muss man sich aber gut überlegen, wie dies korrekt gemacht wird!

Wir setzen $f(x) = x^3$ und $g(x) = 8x^3$. Dann erhält man A wiefolgt:

- Unter dem ersten, linken Bogen ergibt sich die Fläche aus dem Integral der Differenz $g(x) - f(x)$, solange $g(x) \leq 1$. Die untere Grenze dieses Integrals ist 0, die obere bei $g(x) = 8x^3 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, also

$$\int_0^{1/2} g(x) - f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{1/2} 7x^3\, \mathrm{d}x = \left[\frac{7}{4} x^4 \right]_0^{1/2} = \frac{7}{64}.$$

- In der rechten Hälfte ist die Fläche oben nicht mehr durch $g(x)$, sondern durch die konstante Funktion $y = 1$ begrenzt. Wir integrieren:

$$\int_{1/2}^1 1 - x^3\, \mathrm{d}x = \left[x - \frac{x^4}{4} \right]_{1/2}^1 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{64}\right) = \frac{64 - 16 - 32 + 1}{64} = \frac{17}{64}.$$

Zusammen ergibt sich $A = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$ und somit $F = 4A = \frac{3}{2}$.