Serie 8 · Aufgabe 1a–c

Aufgabe 1

Ziele: Zusammenhänge zwischen Ableitungen, Wachstum und Kurvenform (konvex/konkav) herstellen, Kandidaten für lokale Extremalstellen mit höheren Ableitungen klassifizieren, Wendepunkte identifizieren

(❤️) Gegeben sei die reelle Funktion

$$f\colon x \longmapsto x^{3/2}(x-2)^3$$

a. Bestimmen Sie den Definitionsbereich und Nullstellen von f.

b. Wo ist f monoton wachsend? Monoton fallend? Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f, falls vorhanden, und unterscheiden Sie Minima und Maxima. Besitzt f globale Extrema?

c. Bestimmen Sie den Wertebereich von f.

Lösung:

a. Die Funktion $f(x) = x^{3/2}(x-2)^3$ ist nur für negative Werte von x nicht definiert. Folglich ist der Definitionsbereich von f das Intervall $[0, \infty)$. Da $f(x) = 0$ nur dann gilt, wenn entweder $x^{3/2} = 0$ oder $(x-2)^3 = 0$ gilt, sind die Nullstellen von f gleich $x = 0$ und $x = 2$.

b. Die Ableitung von f ist durch folgende Formel für all $x \in (0, \infty)$ gegeben:

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}(x-2)^3 + 3x^{3/2}(x-2)^2 = \frac{3}{2}x^{1/2}(x-2)^2(3x-2).$$

Folglich sind die Nullstellen von f' im Intervall $(0, \infty)$ durch $x = 2$ und $x = 2/3$ gegeben. Es ist leicht zu überprüfen, dass $f'(x) < 0$ für $x \in (0, 2/3)$, $f'(x) > 0$ für $x \in (2/3, 2)$ und $f'(x) > 0$ für $x > 2$ gilt. Demnach ist f im Intervall $(0, 2/3)$ streng monoton fallend und im Intervall $(2/3, \infty)$ monoton steigend. Dadurch ergibt sich, dass die einzige lokale Minimalstelle von f an der Stelle $x = 2/3$ zu finden ist, und dass $x = 2/3$ auch eine globale Minimalstelle ist. Überdies folgt aus der oben bewiesenen Monotonie, dass die einzige lokale Maximalstelle von f bei $x = 0$ liegt (obwohl $f'(2) = 0$).

c. Wie schon in (b) argumentiert, hat f eine globale Minimalstelle bei $x = 2/3$ und eine lokale Maximalstelle bei $x = 0$. Ausserdem erkennt man leicht, dass $f(x) \to \infty$ wenn $x \to \infty$ und dass f im Definitionsbereich stetig ist. Folglich ist $x = 0$ keine globale Maximalstelle und der Wertebereich von f genau das Intervall $[f(2/3), \infty)$, welches gleich

$$\left[-\frac{(2/3)^{3/2}4^3}{3^3}, \infty\right)$$

ist.

Serie 8 · Aufgabe 1d–e

Aufgabe 1

Ziele: Zusammenhänge zwischen Ableitungen, Wachstum und Kurvenform (konvex/konkav) herstellen, Kandidaten für lokale Extremalstellen mit höheren Ableitungen klassifizieren, Wendepunkte identifizieren

(❤️) Gegeben sei die reelle Funktion

$$f\colon x \longmapsto x^{3/2}(x-2)^3$$

d. Wo ist f konvex? Wo ist f konkav? Bestimmen Sie eventuelle Wendepunkte von f.

e. Mit der oben bestimmten Information skizziere man den Graphen von f.

Lösung:

d. Die zweite Ableitung von f ist durch

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3(x-2)x^{1/2}(3x-2) + \frac{3(x-2)^2(3x-2)}{4x^{1/2}} + \frac{9}{2}(x-2)^2x^{1/2} \\ &= \frac{3(x-2)}{4x^{1/2}}\left(4x(3x-2) + (x-2)(3x-2) + 6(x-2)x\right) \\ &= \frac{3(x-2)}{4x^{1/2}}\left(21x^2 - 28x + 4\right) \end{aligned}$$

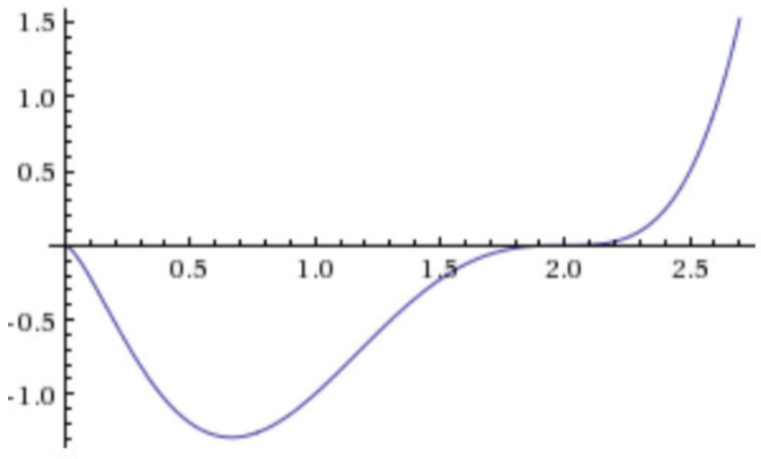
für alle $x \in (0, \infty)$ gegeben. Also ist $f''(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 2$ oder $21x^2 - 28x + 4 = 0$ gilt. Unter Zuhilfenahme der quadratischen Lösungsformel folgt, dass die Nullstellen von f'' durch $x = 2$, $x = \frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{7}} \approx 0.163$ und $x = \frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{7}} \approx 1.171$ gegeben; dies sind die möglichen Wendepunkte von f. Eine kurze Rechnung zeigt, dass $f''(x) < 0$ für $x \in \left(0, \frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{7}}\right)$, dass $f''(x) > 0$ für $x \in \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{7}}, \frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{7}}\right)$, dass $f''(x) < 0$ für $x \in \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{7}}, 2\right)$ und dass $f''(x) > 0$ für $x \in (2, \infty)$ gilt. Folglich ist f strikt konvex auf

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{7}}, \frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{7}}\right) \cup (2, \infty)$$

und strikt konkav auf

$$\left(0, \frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{7}}\right) \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{7}}, 2\right).$$

e. Der Graph von f ist



Serie 8 · Aufgabe 2a

Aufgabe 2

Ziele: Umrechnung implizit zu Polarkoordinaten für ebene Kurve, Extremalrechnung an ebener Kurve

Die *Astroide* ist durch folgende implizite Gleichung gegeben

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

a. Finde die Gleichung der Astroide in Polarkoordinaten (d.h. $\rho = f(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi]$).

Lösung:

a. Es sei $\rho = f(\varphi)$. Somit gilt

$$x = f(\varphi)\cos(\varphi),\ y = f(\varphi)\sin(\varphi).$$

Weil $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ folgt

$$f(\varphi)^{2/3}\left(\cos(\varphi)^{2/3} + \sin(\varphi)^{2/3}\right) = 1$$

und deshalb

$$f(\varphi) = \frac{1}{\left(\cos(\varphi)^{2/3} + \sin(\varphi)^{2/3}\right)^{3/2}}.$$

Der Nenner kann dabei nicht 0 werden, da allfällige Vorzeichen durch das "hoch 2" aufgehoben werden und Cosinus und Sinus keine gemeinsamen Nullstellen besitzen.

Serie 8 · Aufgabe 2b

Aufgabe 2

Ziele: Umrechnung implizit zu Polarkoordinaten für ebene Kurve, Extremalrechnung an ebener Kurve

Die *Astroide* ist durch folgende implizite Gleichung gegeben

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

b. Für welche Winkel $\varphi \in [0, 2\pi]$ ist der Radius ρ minimal?

Lösung:

b. Wir berechnen

$$f'(\varphi) = -\frac{3\left(\frac{2\cos(\varphi)}{3\sqrt[3]{\sin(\varphi)}} - \frac{2\sin(\varphi)}{3\sqrt[3]{\cos(\varphi)}}\right)}{2\left(\sin^{\frac{2}{3}}(\varphi) + \cos^{\frac{2}{3}}(\varphi)\right)^{5/2}}.$$

Somit ist $f'(\varphi) = 0$ genau dann wenn $\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)^{1/3}} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)^{1/3}}$, was äquivalent zu $\cos(\varphi)^{4/3} = \sin(\varphi)^{4/3}$, also auch zu $|\cos(\varphi)| = |\sin(\varphi)|$ ist.

Die Gleichung $|\cos(\varphi)| = |\sin(\varphi)|$ genau dann wenn $\varphi = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, wobei $k \in \mathbb{Z}$ (das überlegt man sich am besten am Einheitskreis). Weiter gilt

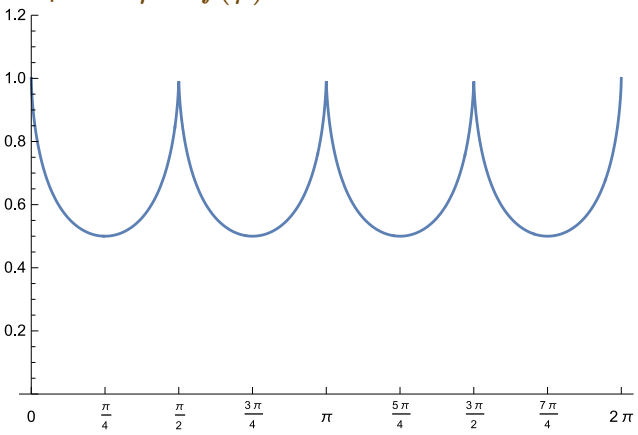
$$f''(\varphi) = \frac{15\left(\frac{2\cos(\varphi)}{3\sqrt[3]{\sin(\varphi)}} - \frac{2\sin(\varphi)}{3\sqrt[3]{\cos(\varphi)}}\right)^2}{4\left(\sin^{\frac{2}{3}}(\varphi) + \cos^{\frac{2}{3}}(\varphi)\right)^{7/2}} - \frac{3\left(-\frac{2}{3}\sin^{\frac{2}{3}}(\varphi) - \frac{2}{3}\cos^{\frac{2}{3}}(\varphi) - \frac{2\sin^2(\varphi)}{9\cos^{\frac{4}{3}}(\varphi)} - \frac{2\cos^2(\varphi)}{9\sin^{\frac{4}{3}}(\varphi)}\right)}{2\left(\sin^{\frac{2}{3}}(\varphi) + \cos^{\frac{2}{3}}(\varphi)\right)^{5/2}}.$$

Es sei $\varphi_0 = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ und $d = |\cos(\varphi_0)| = |\sin(\varphi_0)| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Man erhält

$$f''(\varphi_0) = 0 - \frac{3\left(-\frac{2}{3}d^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}d^{\frac{2}{3}} - \frac{2d^2}{9d^{\frac{4}{3}}} - \frac{2d^2}{9d^{\frac{4}{3}}}\right)}{2\left(d^{\frac{2}{3}} + d^{\frac{2}{3}}\right)^{5/2}} = \frac{3 \cdot \frac{16}{9} \cdot d^{2/3}}{2 \cdot 2^{5/2} d^{5/3}} = \frac{8}{3}\frac{1}{2^{5/2}}\frac{1}{d} = \frac{2}{3} > 0.$$

Somit hat die Funktion $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ an den Punkten $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ lokale Minima. Weil die Funktion f periodisch ist mit Periode $\frac{\pi}{2}$ und die Punkte $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ die einzigen kritischen von f sind, handelt es sich dabei sogar um globale Mimima. (Beachte, dass f genau an den Stellen $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ nicht differenzierbar ist. Weil aber $f(0) = 1 > f(\frac{\pi}{4})$ handelt es sich bei diesen Punkten nicht um globale Minima. Es gilt tatsächlich sogar, dass der Radius an den Stellen $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ maximal wird.)

Graph von $\rho = f(\varphi)$:



Aufgabe 3

Die Abgabe zu dieser Aufgabe wird von den Hilfsassistierenden korrigiert.

Ziele: Grenzwert der Parameterdarstellung betrachten, spezielle Punkte bestimmen, bestimmte Tangenten finden, implizite Darstellung aus Parameterdarstellung finden

Das *Kartesische Blatt* ist die Kurve C gegeben durch die Parameterdarstellung

$$x = \frac{t}{t^3+1}, \qquad y = \frac{t^2}{t^3+1},$$

wobei $t \neq -1$.

a. (❤️) Welche(n) Punkt(e) beschreiben die Grenzwerte $\lim_{t\to\pm\infty}(x(t), y(t))$? Gibt es ein $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, welches diese beschreibt?

b. (❤️) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von C mit der ersten Winkelhalbierenden $y = x$.

c. Finde die Punkte, für die $\dot{x} = 0$ oder $\dot{y} = 0$ ist.

Lösung:

a. Die Grenzwerte sind mit den bekannten Methoden schnell berechnet: Es gilt sowohl $x(t) \to 0$ wie auch $y(t) \to 0$ wenn $t \to \pm\infty$, da der Nennergrad höher ist als der Zählergrad. Der resultierende eine Punkt $(0,0)$ kann aber auch durch $t = 0$ beschrieben werden. In diesem Sinne ist $(0,0)$ ein doppelter Punkt auf C, die Kurve schneidet sich selbst.

b. Wir setzen $x = y$ und erhalten

$$\frac{t}{t^3+1} = \frac{t^2}{t^3+1}$$

Da $t \neq -1$ können wir mit t^3+1 multiplizieren und erhalten die Gleichung $t = t^2$. Diese hat die zwei Lösungen $t = 0$ mit $(x,y) = (0,0)$ und $t = 1$ mit $(x,y) = (1/2, 1/2)$.

c. Beachten Sie, dass

$$\dot{x}(t) = \frac{1-2t^3}{(t^3+1)^2},$$

was impliziert, dass $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ das einzige $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ist, für das $\dot{x}(t) = 0$. Für y gilt

$$\dot{y}(t) = \frac{t(2-t^3)}{(t^3+1)^2},$$

was $\dot{y}(t) = 0$ für $t = 0$ und $t = \sqrt[3]{2}$.

Aufgabe 3

Die Abgabe zu dieser Aufgabe wird von den Hilfsassistierenden korrigiert.

Ziele: Grenzwert der Parameterdarstellung betrachten, spezielle Punkte bestimmen, bestimmte Tangenten finden, implizite Darstellung aus Parameterdarstellung finden

Das *Kartesische Blatt* ist die Kurve C gegeben durch die Parameterdarstellung

$$x = \frac{t}{t^3+1}, \qquad y = \frac{t^2}{t^3+1},$$

wobei $t \neq -1$.

d. Bestimmen Sie die Gleichung, d.h. eine implizite Darstellung, von C. Verwenden Sie dabei $\frac{y}{x} = t$ für $t \neq 0$, um t zu eliminieren!

Lösung:

d. Für $t \neq 0$ haben wir $\frac{y}{x} = t$. Einsetzen in die Gleichung für x gibt:

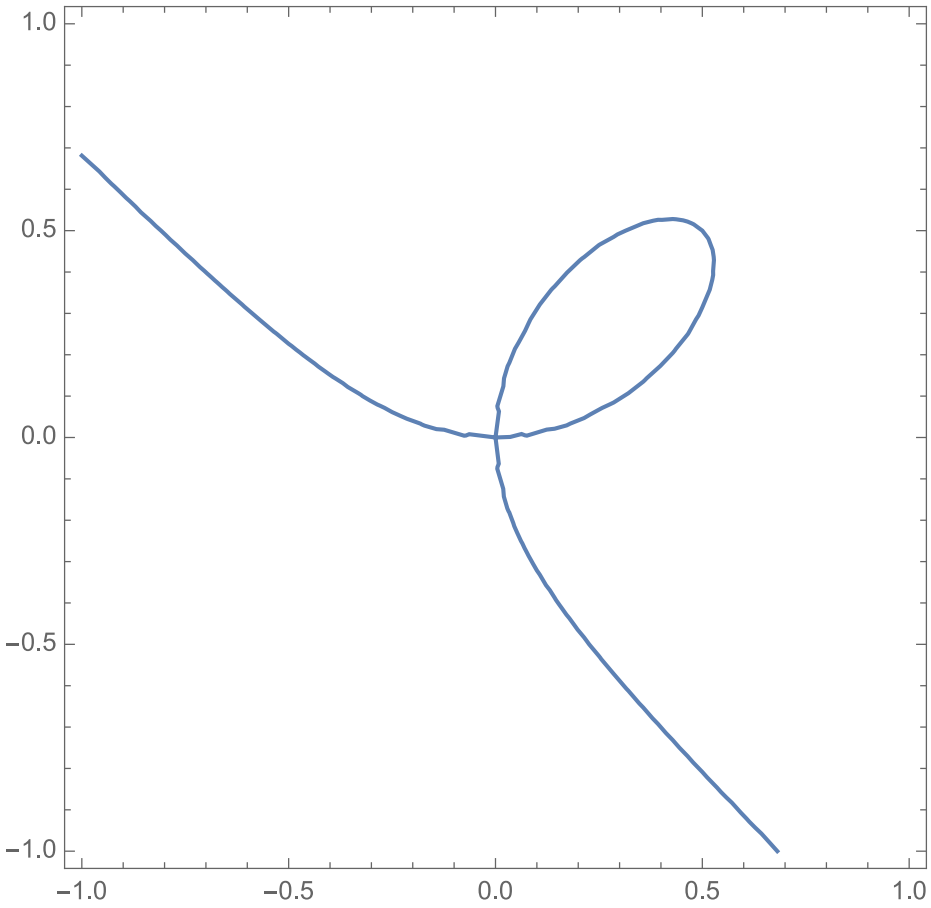
$$x = \frac{\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^3+1} = \frac{yx^2}{y^3+x^3},$$

Und so,

$$y^3 + x^3 - xy = 0.$$

Falls $t = 0$, dann befindet sich die Kurve C im Punkt $(0,0)$, der die obige Gleichung auch erfüllt. Somit ist die implizite Darstellung von C gegeben durch

$$y^3 + x^3 - xy = 0.$$



Aufgabe 3

Die Abgabe zu dieser Aufgabe wird von den Hilfsassistierenden korrigiert.

Ziele: Grenzwert der Parameterdarstellung betrachten, spezielle Punkte bestimmen, bestimmte Tangenten finden, implizite Darstellung aus Parameterdarstellung finden

Das *Kartesische Blatt* ist die Kurve C gegeben durch die Parameterdarstellung

$$x = \frac{t}{t^3+1}, \qquad y = \frac{t^2}{t^3+1},$$

wobei $t \neq -1$.

Mit dem Wissen von Woche 9 können Sie dann ausserdem folgende Aufgaben bearbeiten:

e. (⭐) Bestimmen Sie die Tangenten in den Schnittpunkten von Teilaufgabe (b).

Lösung:

e. Die Tangentensteigung berechnet sich zu

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\frac{2t(t^3+1)-t^2\cdot 3t^2}{(t^3+1)^2}}{\frac{(t^3+1)-t\cdot 3t^2}{(t^3+1)^2}} = \frac{2t(t^3+1)-t^2\cdot 3t^2}{(t^3+1)-t\cdot 3t^2} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} = \begin{cases} 0, & t=0 \\ -1, & t=1. \end{cases}$$

Die Tangente durch $(x,y)=(0,0)$ ist diejenige zu $t=0$, also

$$y = 0.$$

Der Punkt $(0,0)$ wird aber auch als Grenzwert mit $t \to \pm\infty$ erreicht. Einsetzen dieses Grenzwerts in die obige Formel ergibt für beide Fälle den Grenzwert ∞, d.h. es gibt eine vertikale Tangente mit Gleichung $x = 0$.\ Die Tangente durch $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist diejenige zu $t = 1$, also

$$y = -x + q$$

für $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, d. h. $x + y - 1 = 0$.

f.