Serie 7 · Aufgabe 1a

Aufgabe 1

Ziele: Gebiete von komplexen Zahlen aus Formel erkennen und zeichnen, Nullstellen eines Polynoms bestimmen und in Mengenzugehörigkeit entscheiden

Es sei das Gebiet

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \;\middle|\; \left| \frac{z+4}{z} - 1 \right| > 7 \right\}$$

gegeben.

a. Beschreiben Sie mit Worten das Gebiet B in der komplexen Ebene.

Lösung:

a. Wir formen zuerst den Term im Betrag etwas um:

$$\frac{z+4}{z} - 1 = 1 + \frac{4}{z} - 1 = \frac{4}{z}.$$

Damit lässt sich die Ungleichung umschreiben zu

$$\left| \frac{z+4}{z} - 1 \right| > 7 \Leftrightarrow 4 \cdot \left| \frac{1}{z} \right| > 7 \Leftrightarrow |z| < \frac{7}{4}.$$

Das Gebiet B ist also der Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius $\frac{7}{4}$.

Aufgabe 1

Ziele: Gebiete von komplexen Zahlen aus Formel erkennen und zeichnen, Nullstellen eines Polynoms bestimmen und in Mengenzugehörigkeit entscheiden

Es sei das Gebiet

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \;\middle|\; \left| \frac{z+4}{z} - 1 \right| > 7 \right\}$$

gegeben.

b. Das Polynom $z^3 + \frac{7}{2}z^2 + 7z + 6$ hat eine komplexe Nullstelle mit Realteil gleich -1. Verwenden Sie den Ansatz $z_1 = -1 + iy$, $y \in \mathbb{R}$, und bestimmen Sie so alle Nullstellen dieses Polynoms. Wie lauten die Nullstellen in Polarform?

c. Welche dieser Nullstellen befinden sich in B?

Lösung:

b. Wir bemerken zuerst, dass -1 keine Nullstelle des Polynoms ist und folglich die Nullstelle mit Realteil -1 nicht reell ist. Da solche Nullstellen für Polynome mit reellen Koeffizienten immer in komplex konjugierten Paaren auftreten, hat das Polynom zwei Nullstellen von der Form

$$z_{1,2} = -1 \pm iy.$$

Somit müssen wir vom Polynom einen Faktor der Form

$$(z+1+iy)(z+1-iy) = z^2 + 2z + 1 + y^2$$

abspalten können. Polynomdivision ergibt

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
(& z^3 & + & \frac{7}{2}z^2 & + & 7z & + & 6 \quad) \div (z^2+2z+1+y^2) = z + \frac{3}{2} \\
-(& z^3 & + & 2z^2 & + & (1+y^2)z & &) \\
\hline
 & & & \frac{3}{2}z^2 & + & (6-y^2)z & + & 6 \\
-(& & & \frac{3}{2}z^2 & + & 3z & + & \frac{3}{2}(1+y^2)) \\
\hline
 & & & & & (3-y^2)z & + & \frac{9}{2} - \frac{3}{2}y^2
\end{array}$$

Es bleibt also der Rest

$$(3-y^2)z + \frac{9}{2} - \frac{3y^2}{2} = (3-y^2)(z+3/2)$$

übrig und dieser muss gleich 0 sein. Daraus ergeben sich die beiden Lösungen $y_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ oder die dritte Lösung $z_3 = -\frac{3}{2}$. In Normalform lauten die drei Nullstellen lauten nun

$$z_1 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_3 = -\frac{3}{2}.$$

In Polarform lauten diese somit

$$z_1 = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad z_2 = 2e^{\frac{-2\pi i}{3}}, \quad z_3 = \frac{3}{2}e^{\pi i}.$$

c. In b. haben wir die Beträge der Nullstellen berechnet: $|z_1| = |z_2| = 2 > \frac{7}{4}$ und $|z_3| = \frac{3}{2} < \frac{7}{4}$. Es folgt $z_1 \notin B$, $z_2 \notin B$, $z_3 \in B$.

Serie 7 · Aufgabe 2a

Aufgabe 2

Die Abgabe zu dieser Aufgabe wird von den Hilfsassistierenden korrigiert.

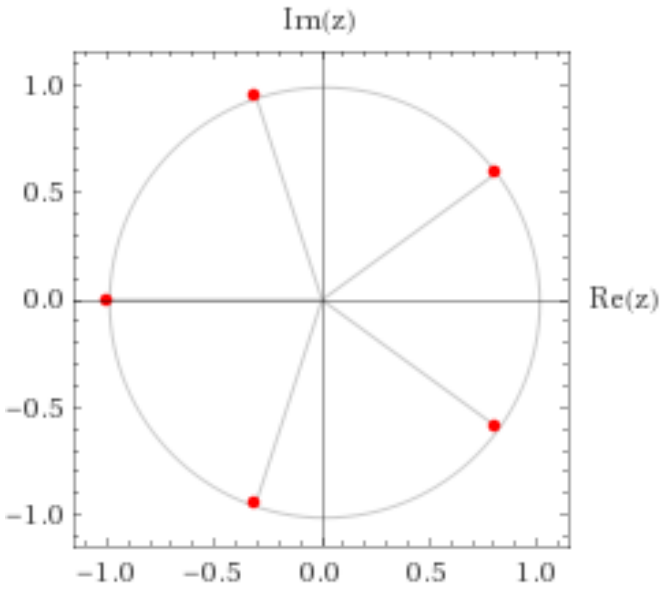
Ziele: Mögliche Konfigurationen von reellen und komplexen Nullstellen von reellen Polynomen erkennen und angeben

Es bezeichne p ein Polynom fünften Grades mit reellen Koeffizienten. Weiter bezeichne $r_p \geq 0$ bzw. $c_p \geq 0$ die mit Vielfachheit gezählten reellen bzw. komplexen, nicht-reellen Nullstellen von p.

a. (❤️) Was sind r_p und c_p für das Beispiel $p(x) := x^5 + 1$?

Lösung:

1. Weil $(-1)^5 = -1$ ist -1 eine Nullstelle von p. Es bezeichne $\xi_k := e^{2\pi i \frac{k}{5}}$ für $k = 0, \dots, 4$ die 5-ten Einheitswurzeln. Die Nullstellen von p sind also $-\xi_k$ für $k = 0, \dots, 4$, weil $(-\xi_k)^5 = (-1)^5 \xi_k^5 = -1$. Für $k \geq 1$ ist ξ_k nicht-reell, also gilt $r_p = 1$ und $c_p = 4$. Dies kann man auch dem folgenden Bild entnehmen.



Serie 7 · Aufgabe 2b–d

Aufgabe 2

Die Abgabe zu dieser Aufgabe wird von den Hilfsassistierenden korrigiert.

Ziele: Mögliche Konfigurationen von reellen und komplexen Nullstellen von reellen Polynomen erkennen und angeben

Es bezeichne p ein Polynom fünften Grades mit reellen Koeffizienten. Weiter bezeichne $r_p \geq 0$ bzw. $c_p \geq 0$ die mit Vielfachheit gezählten reellen bzw. komplexen, nicht-reellen Nullstellen von p.

b. (❤️) Sei nun p wieder ein allgemeines Polynom fünften Grades mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass immer gilt: $r_p + c_p = 5$.

c. (❤️) Wieso ist $r_p = 2$ und $c_p = 3$ niemals möglich?

d. Finden Sie alle möglichen Werte von r_p. Geben Sie weiterhin jeweils ein Polynom p an, welches genau r_p mit Vielfachheit gezählte reelle Nullstellen hat.

Lösung:

2. Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jedes Polynom n-ten Grades mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ -- also insbesondere auch mit Koeffizienten in $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ -- genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat, wenn man ihre Vielfachheit berücksichtigt. Es folgt also $r_p + c_p = 5$.
3. Wir wissen, dass für eine Nullstelle $z \in \mathbb{C}$ auch $\overline{z}$ eine Nullstelle ist, wenn ein Polynom reelle Koeffizienten hat. Somit ist c_p immer durch 2 teilbar und der Fall $c_p = 3$ kann also nicht eintreten.
4. In der letzten Teilaufgabe haben wir gezeigt, dass c_p immer durch 2 teilbar sein muss. Weiterhin wissen wir wegen Teilaufgabe b), dass $c_p \leq 5$. Somit sind folgende Konstellationen denkbar:
   1. $r_p = 1, c_p = 4$
   2. $r_p = 3, c_p = 2$
   3. $r_p = 5, c_p = 0$.

   Die Konstellationen werden beispielsweise durch folgende Polynome realisiert
   1. $p(x) = (x-1)(x^2+1)^2 = x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$,
   2. $p(x) = (x-1)^3(x^2+1) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1$,
   3. $p(x) = (x-1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$.

Aufgabe 3

Ziele: Kennenlernen der hyperbolischen Funktionen Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus, Herleiten von den wichtigsten Eigenschaften

Die hyperbolischen Funktionen $\sinh$ und $\cosh$ sind wie folgt definiert:

$$\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Beweisen Sie folgende Identitäten für alle $x \in \mathbb{R}$:

a. (❤️) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
b. $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$

Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle $x \in \mathbb{R}$, an denen beide Seiten definiert sind:

c. $2\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cosh(x) + 1.$

Lösung:

a. $\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$, und analog $\sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$, also folgt $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(2+2) = 1.$
b. $\sinh x \cdot \cosh y = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) = \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-(x+y)})$, also folgt $\sinh x \cdot \cosh y + \sinh y \cdot \cosh x = \frac{1}{4}(2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}) = \sinh(x+y).$
c. $2\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\left(\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{2}\right)^2 = 2\frac{e^x+2+e^{-x}}{4} = \cosh x + 1.$

Serie 7 · Aufgabe 3d–f

Aufgabe 3

Ziele: Kennenlernen der hyperbolischen Funktionen Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus, Herleiten von den wichtigsten Eigenschaften

Die hyperbolischen Funktionen $\sinh$ und $\cosh$ sind wie folgt definiert:

$$\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle $x \in \mathbb{R}$, an denen beide Seiten definiert sind:

d. $\operatorname{Arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

e. (❤️) $\operatorname{Arsinh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

f. (❤️) $\operatorname{Arcosh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Lösung:

d. Setze $y := \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \geq 1$. Dann gilt $2y - e^x = \frac{1}{e^x}$ und damit

$$2ye^x - (e^x)^2 = 1,$$

also $(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$. Es folgt $e^x = \frac{1}{2}(2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}) = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$, es gibt hier zwei Äste der Umkehrfunktion (da der $\cosh$ im Unterschied zum $\sinh$ nicht injektiv ist). Wir verwenden den Teil rechts im Bild, d. h. bei $x > 0$ und dort gilt $e^x > 1$, d.h. wir verwenden die Lösung mit dem Plus. Folglich erhalten wir $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$, was die Umkehrfunktion des Cosinus hyperbolicus darstellt. Für den Teil $x < 0$ hätten wir die Lösung mit dem Minus bekommen.

e. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\operatorname{Arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ und $\ln' x = \frac{1}{x}$. Also gilt gemäss der Kettenregel

$$\operatorname{Arsinh}' x = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x^2 + 1)'\right)$$
$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

f. Ganz analog wie für Arsinh.

Aufgabe 4

Ziele: Funktionen nach ihren Grössenordnungen sortieren

(❤️) Ordnen Sie die folgenden sechs Funktionen nach ihren Grössenordnungen, wenn $x \to +\infty$ strebt.

a. $\ln\left(\ln\left(x^2\right)\right)$
b. $\ln\left(e^x - x\right)$
c. x^2
d. $x^{1/5}$
e. $\ln\left(10\, x^{1/2}\right)$
f. e^{3x}

Lösung:

Wir verwenden

$$\ln x = o(x^k) \quad \text{für } x \to +\infty, \quad \text{falls } k > 0 \tag{1}$$

$$x^k = o(e^x) \quad \text{für } x \to +\infty, \tag{2}$$

um die folgenden Grenzwerte zu berechnen:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\ln x^2}{\ln 10x^{1/2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln 2 + \ln\ln x}{\ln 10 + \frac{1}{2}\ln x} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\ln 2 + \ln y}{\ln 10 + \frac{1}{2} y} \overset{(1)}{=} 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(10x^{1/2})}{x^{1/5}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln 10 + \frac{1}{2}\ln x}{x^{1/5}} \overset{(1)}{=} 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\frac{1}{5}}}{\ln(e^x - x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}}{\frac{e^x-1}{e^x-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{5} \dfrac{e^x - x}{x^{\frac{4}{5}}(e^x - 1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{5} \dfrac{1 - \frac{x}{e^x}}{x^{\frac{4}{5}}(1 - \frac{1}{e^x})} = 0$
  .
- $0 \overset{(2)}{\leq} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^x - x)}{x^2} \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln e^x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{-1} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^{3x}} \overset{(2)}{=} 0$

Zusammengefasst hat man also

$$\text{a)} \ll \text{e)} \ll \text{d)} \ll \text{b)} \ll \text{c)} \ll \text{f)}$$