

Aufgabe 1

Ziele: Gebiete von komplexen Zahlen anhand einer Formel erkennen und zeichnen, Nullstellen eines Polynoms bestimmen und in Mengenzugehörigkeit entscheiden

Es sei das Gebiet

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \frac{z+4}{z} - 1 > 7 \right\}$$

gegeben.

- Beschreiben Sie mit Worten das Gebiet B in der komplexen Ebene.
- Das Polynom $z^3 + \frac{7}{2}z^2 + 7z + 6$ hat eine komplexe Nullstelle mit Realteil gleich -1 . Verwenden Sie den Ansatz $z_1 = -1 + iy$, $y \in \mathbb{R}$, und bestimmen Sie so alle Nullstellen dieses Polynoms. Wie lauten die Nullstellen in Polarform?
- Welche dieser Nullstellen befinden sich in B ?

Aufgabe 2

Die Abgabe zu dieser Aufgabe wird von den Hilfsassistierenden korrigiert.

Ziele: Mögliche Konfigurationen von reellen und komplexen Nullstellen von reellen Polynomen erkennen und angeben

Es bezeichne p ein Polynom fünften Grades mit reellen Koeffizienten. Weiter bezeichne $r_p \geq 0$ bzw. $c_p \geq 0$ die mit Vielfachheit gezählten reellen bzw. komplexen, nicht-reellen Nullstellen von p .

- a. (♥) Was sind r_p und c_p für das Beispiel $p(x) := x^5 + 1$?
- b. (♥) Sei nun p wieder ein allgemeines Polynom fünften Grades mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass immer gilt: $r_p + c_p = 5$.
- c. (♥) Wieso ist $r_p = 2$ und $c_p = 3$ niemals möglich?
- d. Finden Sie alle möglichen Werte von r_p . Geben Sie weiterhin jeweils ein Polynom p an, welches genau r_p mit Vielfachheit gezählte reelle Nullstellen hat.

Aufgabe 3

Ziele: Kennenlernen der hyperbolischen Funktionen Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus, Herleiten von den wichtigsten Eigenschaften

Die hyperbolischen Funktionen $\sinh$ und $\cosh$ sind wie folgt definiert:

$$\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Beweisen Sie folgende Identitäten für alle $x \in \mathbb{R}$:

- a. (♥) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- b. $\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$

Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle $x \in \mathbb{R}$, an denen beide Seiten definiert sind:

- c. $2 \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cosh(x) + 1.$
- d. $\operatorname{Arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
- e. (♥) $\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- f. (♥) $\operatorname{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Aufgabe 4

Ziele: Funktionen nach ihren Grössenordnungen sortieren

(❤️) Ordnen Sie die folgenden sechs Funktionen nach ihren Grössenordnungen, wenn $x \rightarrow +\infty$ strebt.

a. $\ln(\ln(x^2))$

b. $\ln(e^x - x)$

c. x^2

d. $x^{1/5}$

e. $\ln(10 x^{1/2})$

f. e^{3x}

◀ Moodle Quiz
Woche 7

Zur Aktivität

Abgabe Serie 7 ▶