

Status	Beendet
Begonnen	Dienstag, 28. Oktober 2025, 11:28
Abgeschlossen	Dienstag, 28. Oktober 2025, 11:29
Dauer	32 Sekunden

Information

Aufgabe 1 (wird korrigiert)

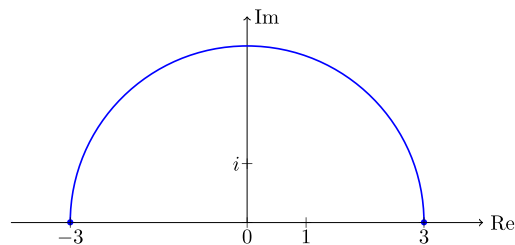
Ziele: Komplexe Mengen geometrisch interpretieren und zeichnen, Bedeutung komplexer Beträge verwenden

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene $\mathbb{C}$.

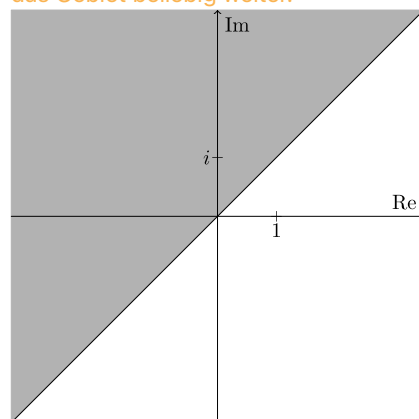
- (♥) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$
- (♥) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z)\}$
- (♥) $\{z \in \mathbb{C} \mid (|z - 3| \geq 1) \text{ und } (|z - 1 - i| < 4)\}$
- (♥) $\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{|z+2-2i|}{|z+i|} = 2\}$
- $\{z \in \mathbb{C} \mid (|z - i + 3| \geq |z + 2i|) \text{ und } (\operatorname{Re}(z) > 0) \text{ und } (\operatorname{Im}(z) > 0)\}$

Lösung:

- Die Teilmenge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ beschreibt den Teil der Kreislinie mit Radius 3 und den Nullpunkt $0 \in \mathbb{C}$, der oberhalb (oder auf) der x -Achse liegt. Dies entspricht dem blauen Halbkreis im Bild unten, wobei die Punkte 3 und -3 dazugehören.

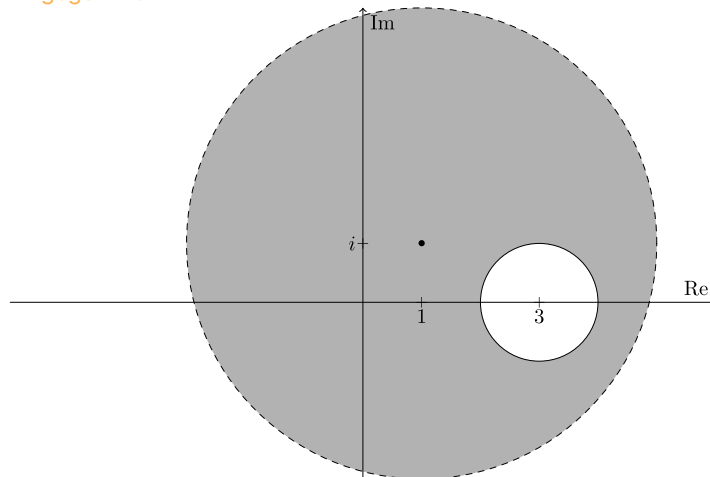


- Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z)\}$ beschreibt den Halbraum derjenigen Punkte, welche oberhalb oder auf der Hauptdiagonalen ($y = x$, wenn man z als $x + iy$ schreibt) liegen ($\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\}$, wenn man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert). Dies entspricht dem grau gefärbten Gebiet, wobei die Diagonale ($x=y$) dabei ist. Gegen oben und gegen links geht das Gebiet beliebig weiter.



- Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid (|z - 3| \geq 1) \wedge (|z - 1 - i| < 4)\}$ umfasst all diejenigen Punkte, die vom Punkt $3 \in \mathbb{C}$ mindestens den Abstand 1 haben ($|z - 3| \geq 1$), also ausserhalb des offenen Kreises um 3 mit Radius 1 liegen, und gleichzeitig vom Punkt $1 + i \in \mathbb{C}$ einen

Abstand von weniger als 4 aufweisen ($|z - 1 - i| < 4$), also innerhalb des offenen Kreises um $1 + i$ mit Radius 4 liegen. Dies entspricht dem grau gefärbten Gebiet im Bild unten, wobei der kleine Kreis um den Punkt 3 dazugehört, der grosse Kreis um den Punkt $1 + i$ hingegen nicht.



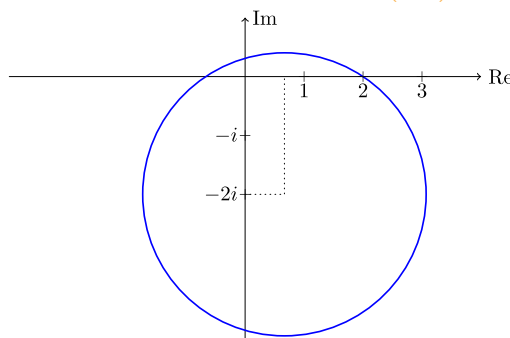
- d. Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{|z+2-2i|}{|z+i|} = 2\}$ beschreibt eine Kreislinie, nämlich diejenige mit Mittelpunkt $\frac{2}{3} - 2i$, welche durch den Punkt 2 verläuft. Dies entspricht dem blauen Kreis im Bild unten. Dies kann man sich zum Beispiel überlegen, indem man mit $z = x + iy$ in kartesischen Koordinaten rechnet:

$$\begin{aligned} \frac{|z+2-2i|}{|z+i|} = 2 &\Leftrightarrow |z+2-2i|^2 = 4|z+i|^2 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 = 4(x^2 + (y+1)^2). \end{aligned}$$

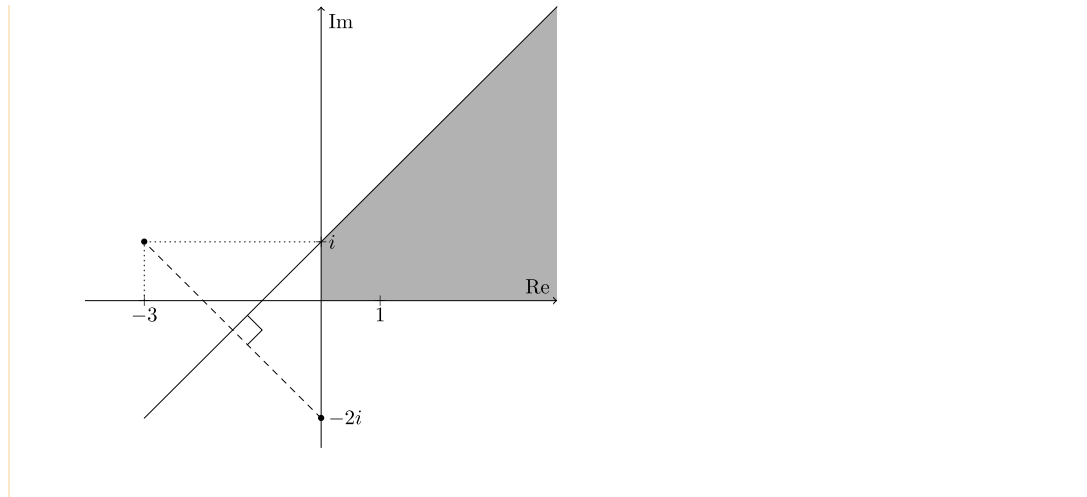
Umformungen und quadratische Ergänzung liefern, dass dies nichts anderes ist als

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 4x + 3y^2 + 12y - 4 \\ &= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} + 3(y+2)^2 - 16 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{52}{9} = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + (y+2)^2. \end{aligned}$$

Also handelt es sich um die Kreislinie mit Radius $\sqrt{\frac{52}{9}}$ um den Punkt $(\frac{2}{3}, -2)$ (welcher der komplexen Zahl $\frac{2}{3} - 2i$ entspricht). Durch Einsetzen von $z = 2$ bzw. $\sim(x, y) = (2, 0)$ kann man sehen, dass der Punkt 2 bzw. $\sim(2, 0)$ Element der Menge ist.



- e. Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid (z - i + 3) \geq |z + 2i| \} \wedge (\operatorname{Re}(z) > 0) \wedge (\operatorname{Im}(z) > 0)$ umfasst all diejenigen Punkte, die im rechten oberen Quadranten liegen (positiver Real- und Imaginärteil) und deren Abstand zu $i - 3$ (welcher gleich $|z - (i - 3)| = |z - i + 3|$ ist) mindestens so groß ist wie der Abstand zu $-2i$ (welcher $|z - (-2i)| = |z + 2i|$ beträgt). Die letzte Bedingung beschreibt gerade die Punkte, welche auf der gleichen Seite der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecke von $-2i$ und $i - 3$ liegen wie $-2i$. Dies entspricht dem grau gefärbten Gebiet unten, wobei die Mittelsenkrechte von i an ebenfalls zum Gebiet dazugehört, die Achsen hingegen nicht. Es ist zu beachten, dass das Gebiet gegen rechts ins Unendliche weitergeht.



Information

Aufgabe 2 (aktualisiert am 21.10.2025)

Ziel: Trigonometrische Identitäten mit der Eulerformel selber herleiten

Zeigen Sie die folgenden trigonometrische Beziehungen:

- $\cos(3x) = \cos^3(x) - 3 \sin^2(x) \cos(x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$.
- $\sin(3x) = 3 \sin(x) \cos^2(x) - \sin^3(x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x)$.

Lösung:

Wir lösen Teilaufgaben **a)** und **b)** gleichzeitig. Aus der Eulerschen Formel haben wir $e^{i3x} = \cos(3x) + i \sin(3x)$. Ausserdem gilt es mit den Eigenschaften der Exponentialfunktion: $e^{i3x} = (e^{ix})^3$. Also:

$$\begin{aligned} \cos(3x) + i \sin(3x) &= e^{i3x} = (e^{ix})^3 \\ &= (\cos(x) + i \sin(x))^3 \\ &= (\cos(x) + i \sin(x)) (\cos(x) + i \sin(x))^2 \\ &= (\cos(x) + i \sin(x)) (\cos^2(x) + 2i \cos(x) \sin(x) - \sin^2(x)) \\ &= \cos^3(x) - \underbrace{3 \sin^2(x)}_{=1-\cos^2(x)} \cos(x) + i (3 \sin(x) \underbrace{\cos^2(x)}_{=1-\sin^2(x)} - \sin^3(x)) \\ &= 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x) + i (3 \sin(x) - 4 \sin^3(x)). \end{aligned}$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil erhalten wir den ersten Teil der gewünschten Beziehungen. Für die letzte Zeile haben wir die Formel $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ verwendet, um die Ausdrücke ausschliesslich mit Cosinus bzw. Sinus zu schreiben.

Anderer Lösungsweg: Wir berechnen zuerst $\cos(2x)$ und $\sin(2x)$. Aus der Eulerschen Formel und aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion folgt

$$\cos(2x) + i \sin(2x) = e^{i2x} = (e^{ix})^2 = (\cos(x) + i \sin(x))^2 = \cos^2(x) + i2 \sin(x) \cos(x) - \sin^2(x).$$

Durch Vergleichen von Imaginär- und Reellteil erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ \sin(2x) &= 2 \sin(x) \cos(x). \end{aligned}$$

Ähnlicherweise haben wir

$$\begin{aligned} \cos(3x) + i \sin(3x) &= e^{i3x} = e^{i(2x+x)} = e^{i2x} e^{ix} \\ &= (\cos(2x) + i \sin(2x)) (\cos(x) + i \sin(x)) \\ &= \cos^3(x) - 3 \sin^2(x) \cos(x) + i (3 \sin(x) \cos^2(x) - \sin^3(x)). \end{aligned}$$

Dies impliziert wie oben

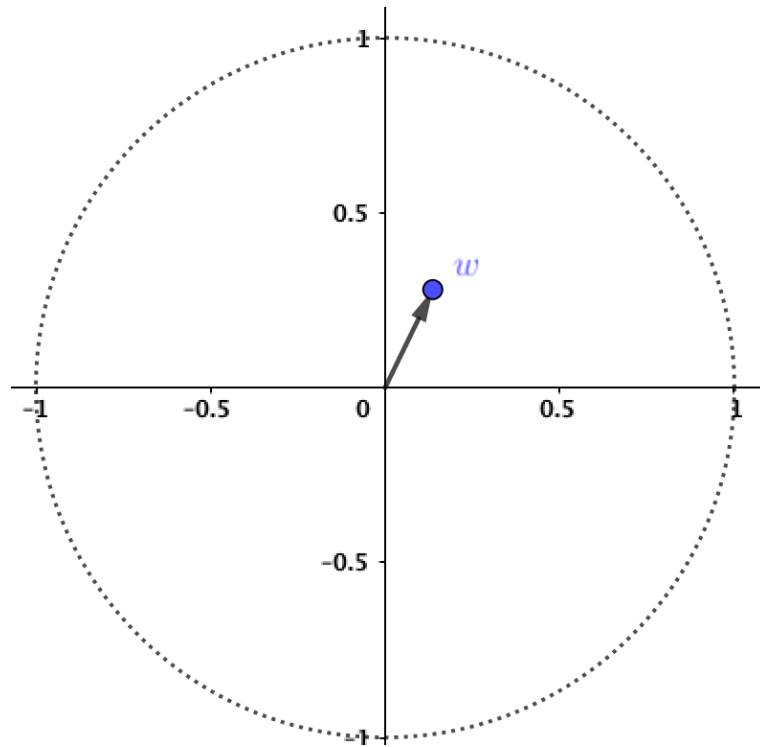
$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos^3(x) - 3 \sin^2(x) \cos(x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x) \\ \sin(3x) &= 3 \sin(x) \cos^2(x) - \sin^3(x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x). \end{aligned}$$

Information

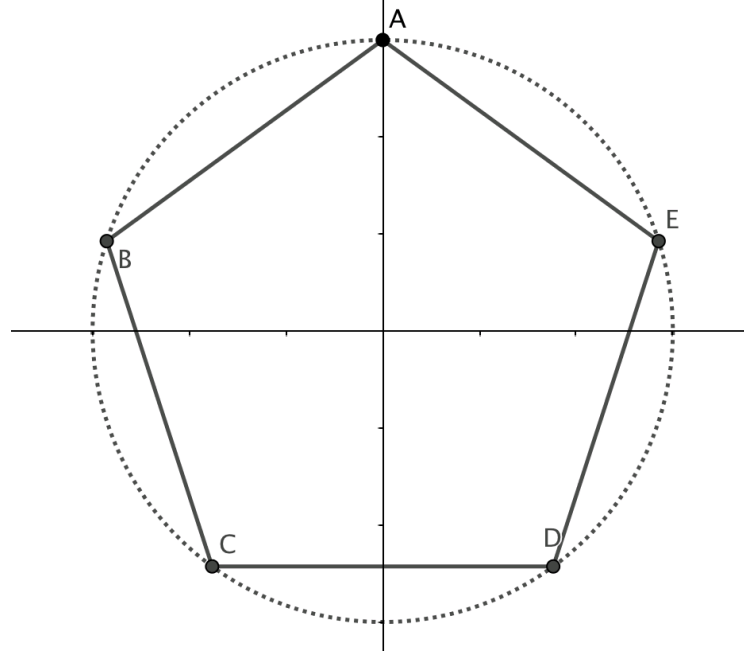
Aufgabe 3

Ziele: Wurzeln von komplexen Zahlen geometrisch verstehen und rechnerisch umsetzen

- (❤️) Skizzieren Sie alle vierten Wurzeln von w :



- b. (♥) Gibt es eine *reelle* Zahl w , sodass die Punkte A, B, C, D und E gerade die fünften Wurzeln von w sind? Begründen Sie!



- c. Die Zahlen

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{16}} \quad \text{und} \quad z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{15\pi}{16}}$$

seien beides Lösungen der Gleichung $z^n = c$. Bestimmen Sie das kleinstmögliche $n \in \mathbb{N}$ sowie $c \in \mathbb{C}$.

Lösung:

- a. Da z_1 und z_2 Lösungen der Gleichung $z^n = c$ sind, gilt es $z_1^n = c = z_2^n$, das heisst

$$\sqrt{2}^n e^{i\frac{5\pi}{16}n} = \sqrt{2}^n e^{-i\frac{15\pi}{16}n}.$$

Das impliziert:

$$\begin{aligned}\frac{5\pi}{16}n &= -\frac{15}{16}\pi n + k2\pi \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \\ \iff \pi \left(\frac{5n}{16} + \frac{15n}{16} - 2k \right) &= 0 \\ \iff \frac{20n}{16} - 2k &= 0 \\ \iff k &= \frac{5}{8}n.\end{aligned}$$

Da k ganzzahlig sein muss, folgt es $n \geq 8$. Für $n = 8$ erhalten wir

$$c = (\sqrt{2})^8 e^{i\frac{5\pi}{16}8} = 16e^{i\frac{5\pi}{2}} = 16i.$$

◀ Schnellübung 2

Direkt zu:

Aufgaben zur Veranstaltung II
(22.10.2025) ▶