

Status	Beendet
Begonnen	Dienstag, 21. Oktober 2025, 14:27
Abgeschlossen	Dienstag, 21. Oktober 2025, 14:27
Dauer	8 Sekunden

Information

Aufgabe 1

Ziel: Regel von Bernoulli-de l'Hôpital auf Grenzwerte bei Definitionslücken anwenden

Berechnen Sie mit Hilfe der Bernoulli-de l'Hôpital-Regel die folgenden Grenzwerte:

- a. (♥) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin(x) - \cos(x)}{\tan x};$
- b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan \frac{1-x}{1+x}}{1-x};$
- c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{\cos^2(x)} - \cos(x)\right)^2}{x \cos(x) - \sin(x)}.$

Lösung:

- a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{\tan x} \stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \sin x}{1 + \tan^2 x} = 1$
- b. Man bemerke zunächst, dass $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} \stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1+t^2} = 1$. Somit haben wir also

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan \frac{1-x}{1+x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan \frac{1-x}{1+x}}{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{1+x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right)^2}{x \cos x - \sin x} &\stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right) \left(\frac{-2}{\cos^3 x} (-\sin x) + \sin x\right)}{\cos x - x \sin x - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right) \left(\frac{2}{\cos^3 x} + 1\right)}{x} \\ \text{c.} \quad &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \left(\left(\frac{2 \sin x}{\cos^3 x} + \sin x\right) \left(\frac{2}{\cos^3 x} + 1\right) + \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right) \left(\frac{6 \sin x}{\cos^4 x}\right)\right)}{x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Information

Aufgabe 2

Ziele: Komplexere Extremalaufgaben lösen: Koeffizienten für Maximum bestimmen, Abhängigkeit vom Definitionsintervall beachten

- a. Bestimmen Sie die Werte der Konstanten $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax^2 + bx$$

im Punkt $(1, 2)$ ein globales Maximum hat.

- b. Seien $c, d \in \mathbb{R}$ so, dass $c < d$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von c und d das Maximum der Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = (x - 1)(2x^2 - 7x + 5)$$

auf dem Intervall $[c, d]$.

Lösung:

- a. Damit $(1, 2)$ eine lokale Extremalstelle sein kann, muss Folgendes gelten:

$$f(1) = a + b = 2$$

$$f'(1) = 2a + b = 0$$

Aus den beiden Gleichungen folgt $a = -2$ und $b = 4$. Somit enthält $f(x) = -2x^2 + 4x$ sicher den gewünschten Punkt mit Ableitung $= 0$. Da f eine Parabel beschreibt mit $a < 0$, ist der Punkt $(1, 2)$ ein globales Maximum in $(1, 2)$.

- b. f ist überall differenzierbar, also kommen keine nicht-differenzierbaren Punkte in Frage. Das Maximum auf dem Intervall $[c, d]$ wird dann entweder am Rand angenommen, also in c oder d , oder in einem kritischen Punkt (d.h. $f'(x) = 0$). Wir suchen also zuerst lokale Maxima der Funktion f auf der ganzen reellen Achse $\mathbb{R}$. Man hat

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x - 1)(x - 2),$$

also sind $x_0 = 1, x_1 = 2$ die kritischen Punkte.

Da f ein kubisches Polynom mit positivem Koeffizienten von x^3 ist, befinden sich die kritischen Punkte jeweils auf bzw. zwischen den Nullstellen. In der faktorisierten Form kann man mit der quadratischen Lösungsformel die weiteren Nullstellen bestimmen und erhält

$$f(x) = (x - 1)(2x^2 - 7x + 5) = 2(x - 1)^2(x - \frac{5}{2}),$$

also ist $\frac{5}{2}$ die einzige andere Nullstelle von f neben $x_0 = 1$. Also hat f in $x_0 = 1$ ein lokales Maximum mit $f(1) = 0$ und in $x_1 = 2$ ein lokales Minimum mit $f(2) = -1$.

Ausserdem sieht man durch Ableiten, dass f auf dem Intervall $(-\infty, 1)$ monoton wachsend, auf $(1, 2)$ monoton fallend, und auf $(2, \infty)$ monoton wachsend ist.

Nun haben wir alle Eigenschaften beisammen und können die folgenden Fälle unterscheiden:

- $d \leq 1$, dann gilt $\max = f(d)$
- $1 < d \leq \frac{5}{2}$ und $c \leq 1$, in diesem Fall $\max = f(1)$
- $1 < d \leq \frac{5}{2}$ und $c > 1$, hier gilt $\max = \max(f(c), f(d))$
- $d > \frac{5}{2}$, dann gilt $\max = f(d)$

Information

Aufgabe 3

Ziele: Absolute und relative Fehler in der ursprünglichen Funktion und in der Linearisierung bestimmen, Resultate qualitativ beschreiben und vergleichen

(♥) Die Funktion $m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$ beschreibt einen exponentiellen Zerfall der Anfangsmasse m_0 mit Zerfallsrate α . Anhand einer Messung soll bestimmt werden, wie gross α für ein neues Material ist. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ beträgt die Masse $m_0 = 1024$ Gramm. Es wird gemessen, wann die Restmasse unter 1 Gramm fällt: Dies passiert nach t_1 Sekunden, also $m(t_1) = 1$.

- Bestimmen Sie $\alpha(t_1)$ als Funktion des Zeitpunkts t_1 .
- Ab jetzt sei $t_1 = 10$ Sekunden gemessen, wobei der Messfehler Δt maximal ± 0.1 Sekunden betrage. Man bestimme die maximal und minimal möglichen Werte von $\alpha(t_1 + \Delta t)$.
- Bestimmen Sie den absoluten Fehler $\Delta\alpha$ exakt (d.h. ohne Linearisierung!) und folgern Sie aus der Annahme $t_1 + \Delta t \approx t_1$, dass $\Delta\alpha$ *ungefähr* proportional zu Δt und zu $\frac{1}{t_1^2}$ ist.
- Bestimmen Sie den relativen Fehler $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ exakt (d.h. ohne Linearisierung!) und folgern Sie aus der Annahme $t_1 + \Delta t \approx t_1$, dass $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ *ungefähr* proportional zum relativen Messfehler der Zeit ist.
- Berechnen Sie die Näherungen $d\alpha$ und $\frac{d\alpha}{\alpha}$ durch die lineare Ersatzfunktion, d.h. $d\alpha = \alpha' dt$. Vergleichen Sie das Resultat mit den echten Fehlern. Was stellen Sie fest?

Lösung:

- Es gilt $1 = m(t_1) = m_0 e^{-t_1 \alpha(t_1)}$, wobei t_1 der Zeitpunkt ist, zu dem die Masse unter 1 Gramm fällt. Wir lösen nach $\alpha(t_1)$:

$$\frac{1}{m_0} = e^{-t_1 \alpha(t_1)} \Leftrightarrow -t_1 \cdot \alpha(t_1) = \ln\left(\frac{1}{m_0}\right) \Leftrightarrow \alpha(t_1) = \frac{1}{t_1} \ln(m_0)$$

- Aus (a) ist $\alpha(t_1)$ in Abhängigkeit von t_1 strikt monoton fallend. Somit wird das Minimum von $\alpha(t_1 + \Delta t)$ bei $t_1 + \Delta t = 10 + \frac{1}{10}$ und das Maximum bei $t_1 - \Delta t = 10 - \frac{1}{10}$ erreicht. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned}\alpha_{\min} &= \alpha\left(10 + \frac{1}{10}\right) = \frac{10}{101} \ln(1024) \approx 0,686 \quad \text{und} \\ \alpha_{\max} &= \alpha\left(10 - \frac{1}{10}\right) = \frac{10}{99} \ln(1024) \approx 0,700.\end{aligned}$$

- Aus Teilaufgabe (a) wissen wir, dass $\alpha(t_1) = \ln(m_0) \frac{1}{t_1}$. Daraus folgt,

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \alpha(t_1 + \Delta t) - \alpha(t_1) = \ln(m_0) \frac{1}{t_1 + \Delta t} - \ln(m_0) \frac{1}{t_1} \\ &= -\ln(m_0) \frac{\Delta t}{t_1(t_1 + \Delta t)}.\end{aligned}$$

Mit $t_1 + \Delta t \approx t_1$ folgen die beide Proportionen.

- Aus Teilaufgabe (c) haben wir $\Delta\alpha = -\alpha \frac{\Delta t}{t_1 + \Delta t}$. Nochmals mit $t_1 + \Delta t \approx t_1$ erhalten wir

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \approx -\frac{\Delta t}{t_1}.$$

- Durch die lineare Ersatzfunktion erhalten wir

$$d\alpha = \alpha' dt = -\frac{1}{t_1^2} \ln(m_0) dt = -\alpha \frac{dt}{t_1} \quad \text{und} \quad \frac{d\alpha}{\alpha} = -\frac{dt}{t_1}.$$

Diese Ausdrücke sind gleich, wenn man $dt = \Delta t$ und $t_1 + \Delta t \approx t_1$ annimmt. Der relative Messfehler in der Zeitmessung schlägt sich linear im relativen Messfehler der Zerfallsrate nieder.

Information

Aufgabe 4

Ziele: Bedeutung Ableitung konstant 0 lernen, Anwendung des Satzes

In dieser Aufgabe wollen wir folgenden Satz beweisen und verwenden:

Satz: Eine stetige, in (a, b) differenzierbare Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann konstant, wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$.

- (♥) Zeigen Sie mittels expliziter Berechnung des Differentialquotienten, dass eine konstante Funktion überall die Ableitung 0 hat.
- Zeigen Sie: Wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt, dann ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konstant. Verwenden Sie dafür den Mittelwertsatz.
- (♥) Beweisen Sie mit dem nun bewiesenen Satz die Relation

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

für alle $x \in [-1, 1]$.

Lösung:

- Wenn f konstant ist, dann ist insbesondere $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$ für alle zulässigen x_0 und Δ . Eingesetzt im Differentialquotient ergibt sich

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

- Für die umgekehrte Implikation nehme man $x_1, x_2 \in (a, b)$, wobei wir $x_1 < x_2$ annehmen. Die Einschränkung $f|_{(x_1, x_2)}$ ist differenzierbar. Der Mittelwertsatz garantiert die Existenz eines $\xi \in (x_1, x_2)$, sodass

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$$

ist, aber laut unserer Annahme ist $f'(\xi) = 0$ und deshalb ist $f(x_1) = f(x_2)$. Da wir dies für alle Paare x_1, x_2 tun können, muss f auf (a, b) konstant sein.

Auch an den Randpunkten muss f den selben Wert annehmen: Da f auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ stetig ist, muss $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ gelten. Der Grenzwert nimmt dabei den konstanten Wert von f , und somit hat $f(a)$ den gleichen Wert. Analog mit $x \rightarrow b^-$ am rechten Intervallrand.

- Man definiere

$$f: x \mapsto \arcsin x + \arccos x,$$

mit $D(f) = [-1, 1]$. Die Funktion f ist stetig und in $(-1, 1)$ differenzierbar, mit

$$f'(x) = \arcsin' x + \arccos' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

für alle $x \in (-1, 1)$. Teilaufgabe (a) zeigt, dass f konstant ist. Somit ist für alle $x \in [-1, 1]$ z.B.

$$\arcsin x + \arccos x = f(x) = f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Information

Aufgabe 5

Ziel: Linearisierte Fehlerrechnung absolut und relativ, Fehler vergleichen

Ein gerader Vollzylinder der Länge L und Durchmesser D habe eine inhomogene Dichte, so dass die Masse m sich wie folgt berechnet:

$$m = \frac{\pi L^2 D^4}{8}.$$

- Man bestimme den absoluten und den relativen linearisierten Fehler in m , wenn der Messfehler in der Länge L maximal ΔL betrage (unter der Annahme, D sei ganz präzise bekannt).
- Man bestimme den absoluten und den relativen linearisierten Fehler in m , wenn der Messfehler im Durchmesser D maximal ΔD betrage (unter der Annahme, L sei ganz präzise bekannt).
- Die Länge L wird auf 1 ± 0.001 Meter gemessen, der Durchmesser D auf 0.1 ± 0.001 Meter. Welcher der beiden absoluten linearisierten Fehler ist grösser? Und welcher der beiden relativen linearisierten Fehler?

Lösung

- Wir leiten nach L ab und erhalten: $\frac{dm}{dL} = \frac{\pi L D^4}{4}$. Somit erhalten wir den absoluten Fehler $\Delta m = \frac{\pi L D^4}{4} \Delta L$. Der relative Fehler ist somit $\frac{\Delta m}{m} = \frac{2 \Delta L}{L}$.
- Wir leiten nach D ab und erhalten: $\frac{dm}{dD} = \frac{\pi L^2 D^3}{2}$. Somit erhalten wir den absoluten Fehler $\Delta m = \frac{\pi L^2 D^3}{2} \Delta D$. Der relative Fehler ist somit $\frac{\Delta m}{m} = \frac{4 \Delta D}{D}$.
- Einsetzen in die obigen Gleichungen mit $\Delta L = 0.001$ resp. $\Delta D = 0.001$ Meter ergibt für L : $\Delta m \approx 7.85 \cdot 10^{-8}$, $\frac{\Delta m}{m} \approx 0.002$ und für D : $\Delta m \approx 1.57 \cdot 10^{-6}$, $\frac{\Delta m}{m} \approx 0.04$. Somit ist der absolute und relative Fehler für D grösser.

Wir werden die hier verwendete Methode in Analysis II, Kapitel IV, weiterentwickeln, um mit den beiden Variablen L und D gleichzeitig arbeiten zu können.

◀ Abgabe Serie 4

Direkt zu:

Bonusaufgabe Woche 5: Bernoulli-Hopital ▶