

Aufgabe 1

Ziel: Regel von Bernoulli-de l'Hôpital auf Grenzwerte bei Definitionslücken anwenden

Berechnen Sie mit Hilfe der Bernoulli-de l'Hôpital-Regel die folgenden Grenzwerte:

a. (♥) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin(x) - \cos(x)}{\tan x};$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan \frac{1-x}{1+x}}{1-x};$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{\cos^2(x)} - \cos(x) \right)^2}{x \cos(x) - \sin(x)}.$

Aufgabe 2

Ziele: Komplexere Extremalaufgaben lösen: Koeffizienten für Maximum bestimmen, Abhängigkeit vom Definitionsintervall beachten

- a. Bestimmen Sie die Werte der Konstanten $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax^2 + bx$$

im Punkt $(1, 2)$ ein globales Maximum hat.

- b. Seien $c, d \in \mathbb{R}$ so, dass $c < d$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von c und d das Maximum der Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = (x - 1)(2x^2 - 7x + 5)$$

auf dem Intervall $[c, d]$.

Aufgabe 3

Ziele: Absolute und relative Fehler in der ursprünglichen Funktion und in der Linearisierung bestimmen, Resultate qualitativ beschreiben und vergleichen

(❤️) In dieser Aufgabe betreiben wir Fehlerrechnung auf zwei verschiedene Arten: Einerseits über die Linearisierung und das Differential (wie in der Vorlesung gezeigt), andererseits probieren wir es mal direkt und ohne Linearisierung aus.

Dazu sei die Funktion $m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$ gegeben, die einen exponentiellen Zerfall der Anfangsmasse m_0 mit Zerfallsrate α beschreibt. Anhand einer Messung soll bestimmt werden, wie gross α für ein neues Material ist. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ beträgt die Masse $m_0 = 1024$ Gramm. Es wird gemessen, wann die Restmasse unter 1 Gramm fällt: Dies passiert nach t_1 Sekunden, also $m(t_1) = 1$.

- a. Bestimmen Sie $\alpha(t_1)$ als Funktion des Zeitpunkts t_1 .

Ab jetzt sei $t_1 = 10$ Sekunden gemessen, wobei der Messfehler Δt maximal ± 0.1 Sekunden betrage.

- b. Man bestimme die maximal und minimal möglichen Werte von $\alpha(t_1 + \Delta t)$.

Als erstes führen wir die klassische Fehlerrechnung mit Linearisierung durch:

- c. Berechnen Sie die Näherungen $d\alpha$ und $\frac{d\alpha}{\alpha}$ durch die lineare Ersatzfunktion, d.h. $d\alpha = \alpha' dt$.

Nun probieren wir es ohne Linearisierung:

- d. Bestimmen Sie den absoluten Fehler $\Delta\alpha$ exakt (d.h. ohne Linearisierung!) und folgern Sie aus der Annahme $t_1 + \Delta t \approx t_1$, dass $\Delta\alpha$ *ungefähr* proportional zu Δt und zu $\frac{1}{t_1^2}$ ist.
- e. Bestimmen Sie den relativen Fehler $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ exakt (d.h. ohne Linearisierung!) und folgern Sie aus der Annahme $t_1 + \Delta t \approx t_1$, dass $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ *ungefähr* proportional zum relativen Messfehler der Zeit ist.

Schliesslich vergleichen wir:

- f. Vergleichen Sie die Resultat aus c. mit denjenigen in d. und e. Was stellen Sie fest? Unter welchen Annahmen sind sie gleich? Welche Variante ist einfacher zu rechnen?

Information

Aufgabe 4

Die Abgabe zu dieser Aufgabe wird von den Hilfsassistentierenden korrigiert.

Ziele: Bedeutung Ableitung konstant 0 lernen, Anwendung des Satzes

In dieser Aufgabe wollen wir folgenden Satz beweisen und verwenden:

Satz: Eine stetige, in (a, b) differenzierbare Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann konstant, wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$.

- (❤️) Zeigen Sie mittels expliziter Berechnung des Differentialquotienten, dass eine konstante Funktion überall die Ableitung 0 hat.
- Zeigen Sie: Wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt, dann ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konstant. Verwenden Sie dafür den Mittelwertsatz.
- (❤️) Beweisen Sie mit dem nun bewiesenen Satz die Relation

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

für alle $x \in [-1, 1]$.

Aufgabe 5

Ziel: Linearisierte Fehlerrechnung absolut und relativ, Fehler vergleichen

Ein gerader Vollzylinder der Länge L und Durchmesser D habe eine inhomogene Dichte, so dass die Masse m sich wie folgt berechnet:

$$m = \frac{\pi L^2 D^4}{8}.$$

- Man bestimme den absoluten und den relativen linearisierten Fehler in m , wenn der Messfehler in der Länge L maximal ΔL betrage (unter der Annahme, D sei ganz präzise bekannt).
- Man bestimme den absoluten und den relativen linearisierten Fehler in m , wenn der Messfehler im Durchmesser D maximal ΔD betrage (unter der Annahme, L sei ganz präzise bekannt).
- Die Länge L wird auf 1 ± 0.001 Meter gemessen, der Durchmesser D auf 0.1 ± 0.001 Meter. Welcher der beiden absoluten linearisierten Fehler ist grösser? Und welcher der beiden relativen linearisierten Fehler?