

Status	Beendet
Begonnen	Mittwoch, 8. Oktober 2025, 13:24
Abgeschlossen	Mittwoch, 8. Oktober 2025, 14:02
Dauer	37 Minuten 39 Sekunden

Information

Aufgabe 1

Ziel: Ableitungen berechnen

(♥) Berechnen Sie $f': D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ für

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \sin(x);$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2+3};$
- $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sin x};$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x};$
- $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (\tan x)^2;$
- $f: \mathbb{R}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{\ln x};$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases};$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$

(★) Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion aus Teilaufgabe **h**) im Punkt $x = 0$ nicht stetig ist.

Lösung:

- $\frac{d}{dx}(x \sin x) = \sin x + x \cos x$ (Produktregel)
- $\frac{d}{dx}((x^2 + 3)^{-1}) = (-1)(x^2 + 3)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2 + 3)^2}$ (Kettenregel)
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ (Kettenregel oder Quotientenregel)
- $\frac{d}{dx}(e^{-x}) = -e^{-x}$ (Kettenregel)
- $\frac{d}{dx}((\tan x)^2) = 2(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 2 \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ (Kettenregel, Abl. von $\tan x$)
- $\frac{d}{dx}(\sqrt{\ln x}) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ (Kettenregel und Ableitung von $\ln x$)
- Es sei $x \neq 0$. Es gilt $\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = 2 \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$ (Kettenregel). Weiter gilt

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}},$$

weil

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0$$

und

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0,$$

wobei wir die Substitution $x = \frac{1}{h}$ gemacht haben, gilt $f'(0) = 0$ (weil der linksseitige und der rechtsseitige

Grenzwert übereinstimmen).

- h. Es sei $x \neq 0$. Wir berechnen $\frac{d}{dx} \left(x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) = 2x \sin \left(\frac{1}{x} \right) - \cos \left(\frac{1}{x} \right)$ (Kettenregel und Produktregel). Weiter gilt

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \left(\frac{1}{h} \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \left(\frac{1}{h} \right).$$

Weil $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$h \sin \left(\frac{1}{h} \right) \leq |h| \cdot 1 = |h|$$

und deshalb lässt sich zeigen, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \sin \left(\frac{1}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \left(\frac{1}{h} \right) \leq \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0.$$

Wir haben also gezeigt $|f'(0)| \leq 0$ und somit gilt $f'(0) = 0$. Fasst man alles zusammen erhält man:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \left(\frac{1}{x} \right) - \cos \left(\frac{1}{x} \right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Im folgenden zeigen wir, dass die Funktion f' im Punkt $x = 0$ nicht stetig ist. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \left(\frac{1}{x} \right) - \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin \left(\frac{1}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} \cos \left(\frac{1}{x} \right) = 0 - \lim_{x \rightarrow 0} \cos \left(\frac{1}{x} \right).$$

Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \left(\frac{1}{x} \right)$ existiert nicht. Um dass zu zeigen muss man zwei Folgen $(a_n), (b_n)$ finden so dass $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$ mit $n \rightarrow +\infty$ und

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{1}{a_n} \right) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{1}{b_n} \right).$$

In der Tat, es sei (a_n) die Folge gegeben durch

$$a_n := \frac{1}{n2\pi}$$

und es sei (b_n) die Folge gegeben durch

$$b_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n2\pi}.$$

Beachte, dass $a_n \rightarrow 0$ und $b_n \rightarrow 0$ falls $n \rightarrow +\infty$. Wir berechnen

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{1}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n2\pi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

und

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{1}{b_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{\pi}{2} + n2\pi \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0;$$

der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \left(\frac{1}{x} \right)$ existiert also nicht und die Funktion f' ist nicht stetig an der Stelle $x = 0$.

Information

Aufgabe 2

Ziel: Eigenschaften von geraden und ungeraden Funktionen bestimmen, wenn man sie ableitet

Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

- Zeigen Sie, dass falls f eine gerade Funktion ist, dann ist f' eine ungerade Funktion.
- Zeigen Sie ausserdem, dass falls f eine ungerade Funktion ist, dann ist f' eine gerade Funktion.

Lösung:

- Aus $f(x) = f(-x)$ folgt durch beidseitiges Ableiten $f'(x) = -f'(-x)$. D.h. $f'(-x) = -f'(x)$. Also ist f' ungerade.
- Aus $-f(x) = f(-x)$ folgt durch beidseitiges Ableiten $-f'(x) = -f'(-x)$. D.h. $f'(-x) = f'(x)$. Also ist f' gerade.

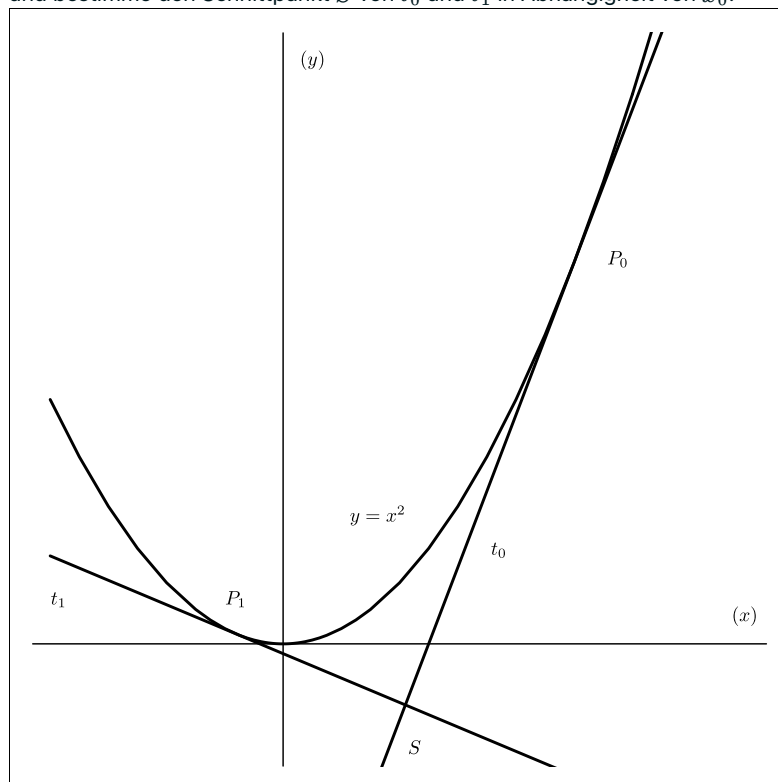
Information

Aufgabe 3

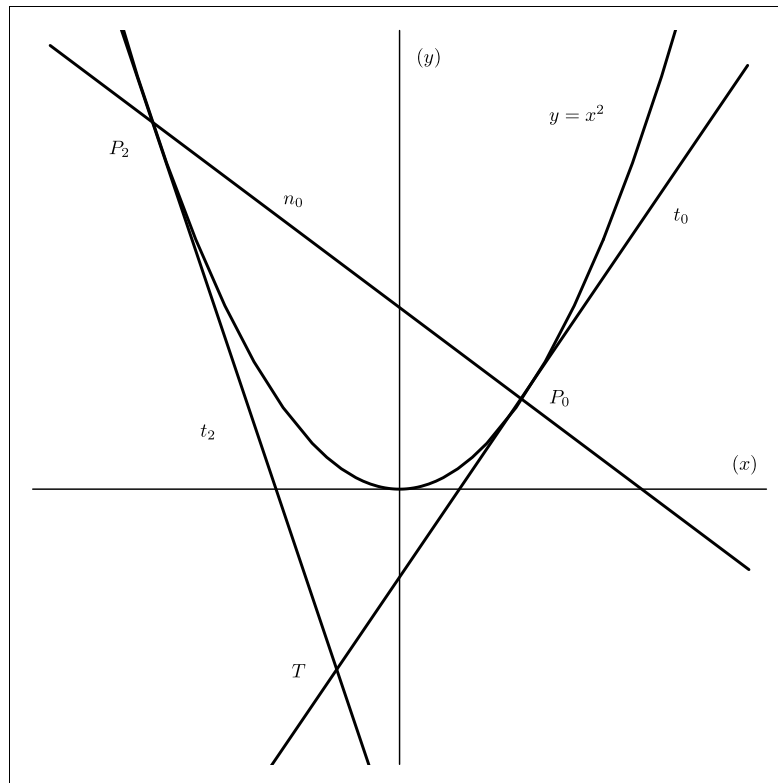
Ziel: Tangenten bestimmen, Ableitungen für geometrische Konstruktionen verwenden

Es sei $P_0 = (x_0, y_0)$ ein von Ursprung verschiedener, aber sonst beliebiger Punkt der Parabel $y = x^2$ und t_0 sei die zugehörige Tangente.

- Man finde den Punkt P_1 auf der Parabel, dessen zugehörige Tangente t_1 senkrecht zu t_0 verläuft und bestimme den Schnittpunkt S von t_0 und t_1 in Abhängigkeit von x_0 .



- Sei nun n_0 ausserdem die zugehörige Normale. Weiter seien P_2 der Schnittpunkt von n_0 mit der Parabel und t_2 die zugehörige Tangente. Man bestimme den Schnittpunkt $T = (x, y)$ von t_0 und t_2 in Abhängigkeit von x_0 . Lässt sich y als Funktion von x ausdrücken, ohne x_0 zu verwenden?

**Lösung:**

- a. Wir fassen die Parabel $y = x^2$ als Graph der Funktion $f : x \mapsto x^2$ auf. Der beliebige Punkt P_0 gehöre zum x -Wert x_0 mit $x_0 \neq 0$. Dann gilt $P_0 = (x_0, x_0^2)$. Da die Ableitung durch $f'(x) = 2x$ gegeben ist, hat t_0 die Steigung $2x_0$. Die Geradengleichung von t_0 lautet somit

$$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0). \quad (*)$$

Die Gerade t_1 steht senkrecht zu t_0 , sie hat also die Steigung $-1/(2x_0)$. Für den gesuchten Punkt $P_1 = (x_1, x_1^2)$ der Parabel muss deshalb die Gleichung

$$2x_1 = -\frac{1}{2x_0}$$

erfüllt sein. Daraus ergibt sich

$$x_1 = -\frac{1}{4x_0},$$

und die Geradengleichung von t_1 lautet somit

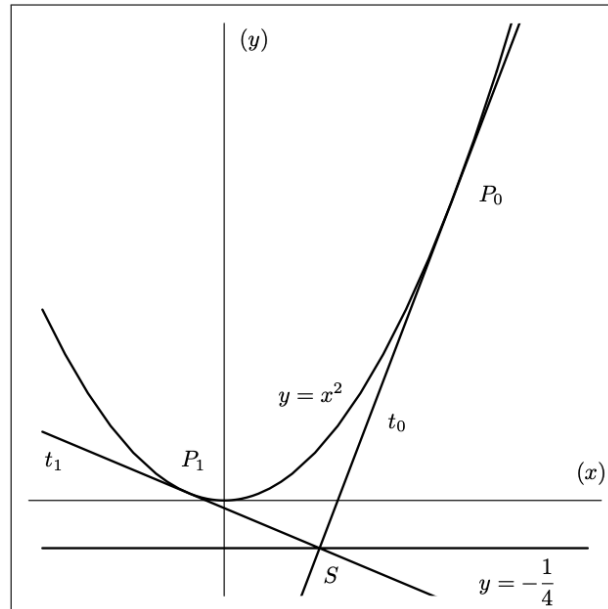
$$y - \frac{1}{16x_0^2} = -\frac{1}{2x_0} \left(x + \frac{1}{4x_0} \right). \quad (**)$$

Wir erhalten den Schnittpunkt S der beiden Geraden t_0, t_1 , indem wir das aus den Gleichungen (*) und (**) gebildete System nach x und y auflösen. Für die Koordinaten von S ergibt sich

$$x = \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{8x_0} \text{ und } y = -\frac{1}{4}.$$

Der Schnittpunkt von t_0 und t_1 liegt also unabhängig vom Ausgangspunkt P_0 auf der Parabeln

$y = -1/4$ zur x -Achse.



- b. Wie in (a) ist die Tangente t_0 im Punkt P_0 , $P_0 = (x_0, x_0^2)$ durch die Gleichung

$$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0) \quad (***)$$

gegeben, die Normale n_0 durch P_0 demzufolge durch

$$y - x_0^2 = -\frac{1}{2x_0}(x - x_0).$$

Um P_2 zu erhalten, löst man das Gleichungssystem

$$\begin{cases} y - x_0^2 = -\frac{1}{2x_0}(x - x_0) \\ y = x^2 \end{cases}$$

nach x und y auf. Die eine Lösung ist natürlich $x = x_0$, $y = x_0^2$; die andere ergibt sich zu

$$x = -x_0 - \frac{1}{2x_0}, y = \left(x_0 + \frac{1}{2x_0}\right)^2.$$

Daraus erhält man $P_2 = (-x_0 - 1/(2x_0), (x_0 + 1/(2x_0))^2)$ und die Tangente t_2 ist durch die Gleichung

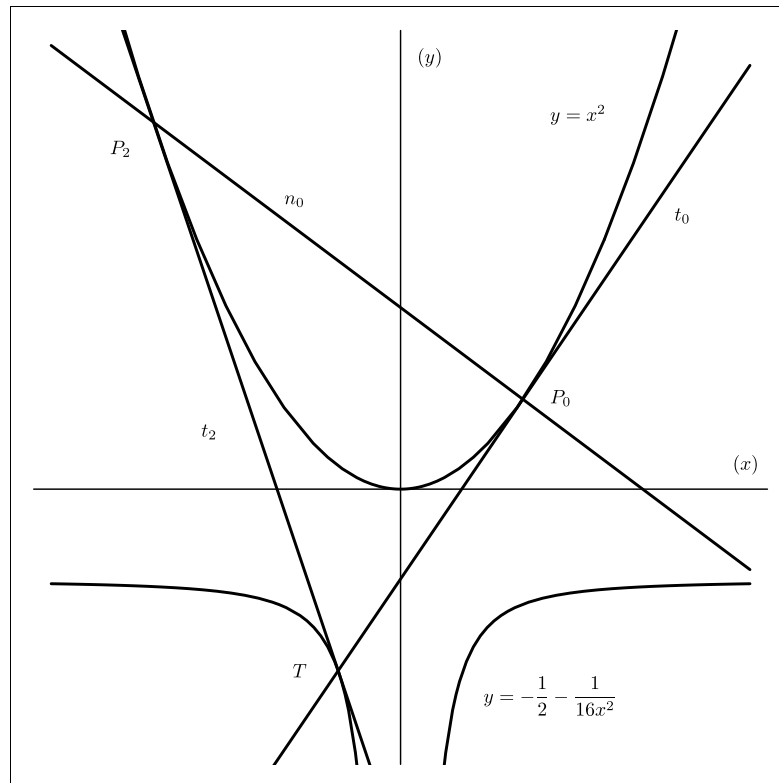
$$y - \left(x_0 + \frac{1}{2x_0}\right)^2 = -2\left(x_0 + \frac{1}{2x_0}\right)\left(x + \left(x_0 + \frac{1}{2x_0}\right)\right) \quad (4)$$

gegeben. Löst man das durch die Gleichungen (***) und (4) gebildete System nach x und y auf, so erhält man die Koordinaten des gesuchten Schnittpunktes T , nämlich

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4x_0} \\ y = -\frac{1}{2} - x_0^2. \end{cases}$$

Eliminieren wir schliesslich x_0 , so ergibt sich die Gleichung der durch den Schnittpunkt gebildeten Kurve K . Sie lautet

$$y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{16x^2}.$$

[◀ Abgabe Serie 3](#)

Direkt zu:

[Schnellübung 1 ▶](#)