

Status	Beendet
Begonnen	Donnerstag, 2. Oktober 2025, 20:56
Abgeschlossen	Donnerstag, 2. Oktober 2025, 20:57
Dauer	1 Minute 13 Sekunden

Information

Aufgabe 1:

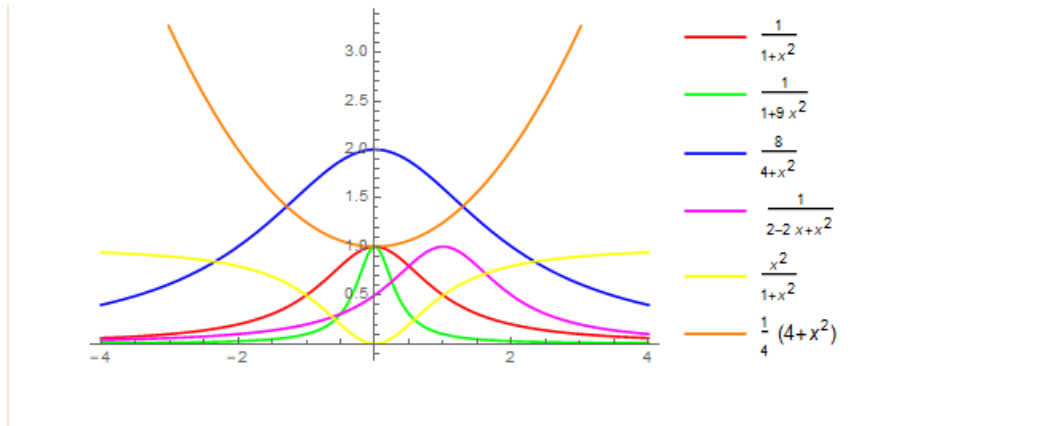
Ziele: Koordinatentransformationen anhand expliziter Funktion bestimmen, Graphen zeichnen, Veränderung in Worten beschreiben

(♥) Ausgehend von der Funktion f_1 zeichnen Sie in einem Koordinatensystem mit der Einheit 2cm die Graphen der Funktionen f_1 bis f_6 . Beschreiben Sie auch in Worten, wie die Graphen von f_2 bis f_6 aus f_1 hervorgehen.

- $f_1: x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
- $f_2: x \mapsto \frac{1}{1+9x^2}$
- $f_3: x \mapsto \frac{8}{4+x^2}$
- $f_4: x \mapsto \frac{1}{2-2x+x^2}$
- $f_5: x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$
- $f_6: x \mapsto \frac{1}{4}(x^2 + 4)$

Lösung:

- [a] f_1 . Die Funktion f_1 ist gerade und hat ein globales Maximum genau an dem Punkt an dem der Nenner am kleinsten ist. Es gilt $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und deshalb ist der minimale Wert des Nenners $1 + x^2$ gleich 1. Die Funktion f_1 hat also ein globales Maximum beim Punkt $x = 0$. Weiter gilt $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = 0$. Mit anderen Worten die Funktion verschwindet im Unendlichen. Zusätzlich gilt $f_1(x_1) > f_1(x_2)$ für alle $0 \leq x_1 \leq x_2$. Diese Informationen unter Berücksichtigung von $f_1(1) = 1/2$ und $f_1(2) = 1/5$ genügen bereits für eine grobe Skizze.
- [b] f_2 . Es gilt $f_2(x) = f_1(3x)$. Skalierung um einen Drittel in Richtung x -Achse.
- [c] f_3 . Es gilt $f_3(x) = 2f_1(\frac{x}{2})$. Skalierung um zwei in Richtung x -Achse und Skalierung um zwei in Richtung y -Achse.
- [d] f_4 . Es gilt $f_4(x) = f_1(x - 1)$. Translation des Graphen von f_1 um eine Einheit nach rechts.
- [e] f_5 . Es gilt $f_5(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = 1 - f_1(x)$. Spiegelung an x -Achse und anschliessende Verschiebung um eine Einheit nach oben.
- [f] f_6 . Es gilt $f_6(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 4) = (\frac{x}{2})^2 + 1 = \frac{1}{f_1(\frac{x}{2})}$. Skalierung um zwei in Richtung x -Achse und anschliessende Inversion. Es ist eine Parabel mit Scheitelpunkt bei $(0, 1)$.



Information

Aufgabe 2

Ziele: Injektivität, Surjektivität und Bijektivität bestimmen, Verkettung von Funktionen, Umkehrfunktion bestimmen

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto 2x - 6 \\ f_2 : \mathbb{R} &\rightarrow [0, \infty), & x &\mapsto |x| \\ f_3 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto \min\{x^2 - 9, 0\} \\ f_4 : \mathbb{R} \setminus \{3\} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto \frac{x+1}{f_1(x)}. \end{aligned}$$

Dabei ist $\min$ die Minimumsfunktion, d.h. $\min\{x^2 - 9, 0\}$ ist die jeweils kleinere Zahl von $x^2 - 9$ und 0, jeweils für jedes x separat bestimmt.

- (♥) Untersuchen Sie alle Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.
- (♥) Skizzieren Sie auf dem Intervall $[-5, 5]$ die Funktionen $g := f_3 - f_1$,

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_3(x) - f_1(x),$$

$$\text{und } h := f_2 \circ g,$$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto f_2(g(x)).$$

- Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f_4^{-1} : W(f_4) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Bemerkung: Sie müssen $W(f_4) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ hier nicht explizit berechnen.

- Die Funktion $f_5 : x \mapsto |\tan(x^2 + x)|$ hat bei $x = -\frac{1}{2}$ eine positive, lokale Maximalstelle, d.h. die Funktionswerte in der Nähe von $x = -\frac{1}{2}$ sind alle höchstens $f_5(-\frac{1}{2})$ (Das müssen Sie nicht zeigen!). Zeigen Sie ohne Ableitungen zu verwenden: Die Funktion $\tilde{f}_5 : x \mapsto \frac{1}{f_5(\frac{1}{x})} = \frac{1}{|\tan(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x})|}$ hat bei $x = -2$ eine positive, lokale Minimalstelle.

Lösung:

- In der Vorlesung wurde für eine Funktion f Injektivität definiert als

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

das ist logisch äquivalent zu

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

- f_1 ist bijektiv:

$$2x_1 - 6 = 2x_2 - 6 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad f_1 \text{ ist injektiv}$$

$$y \in \mathbb{R} \text{ beliebig, wähle } x = \frac{y+6}{2} \Rightarrow f_1(x) = y \quad f_1 \text{ ist surjektiv}$$

- f_2 ist nicht bijektiv:

$$(\text{z.B.}) \text{ für } x_1 = -1, x_2 = 1 \text{ ist } f_2(x_1) = f_2(x_2) \quad f_2 \text{ ist nicht injektiv}$$

$$y \in [0, \infty) \text{ beliebig, wähle z.B. } x = -y \Rightarrow f_2(x) = y \quad f_2 \text{ ist surjektiv}$$

- f_3 ist nicht bijektiv:

$$(\text{z.B.}) \text{ für } x_1 = -5, x_2 = 8 \text{ ist } f_3(x_1) = f_3(x_2) \quad f_3 \text{ ist nicht injektiv}$$

$$(\text{z.B.}) \text{ für } y = 2 \text{ gibt es kein } x \in \mathbb{R}, \text{ so dass } f_3(x) = y \quad f_3 \text{ ist nicht surjektiv}$$

- Wir beginnen, indem wir $f_4(x)$ umformen:

$$f_4(x) = \frac{x+1}{2x-6} = \frac{1}{2} \frac{x+1}{x-3} = \frac{1}{2} \frac{(x-3)+4}{x-3} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{x-3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x-3}.$$

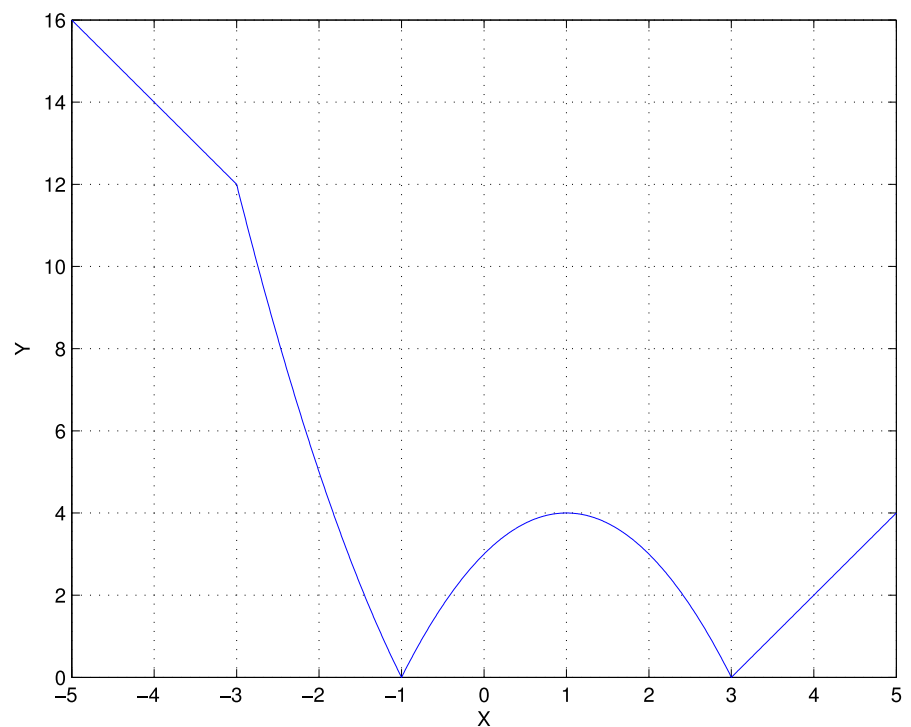
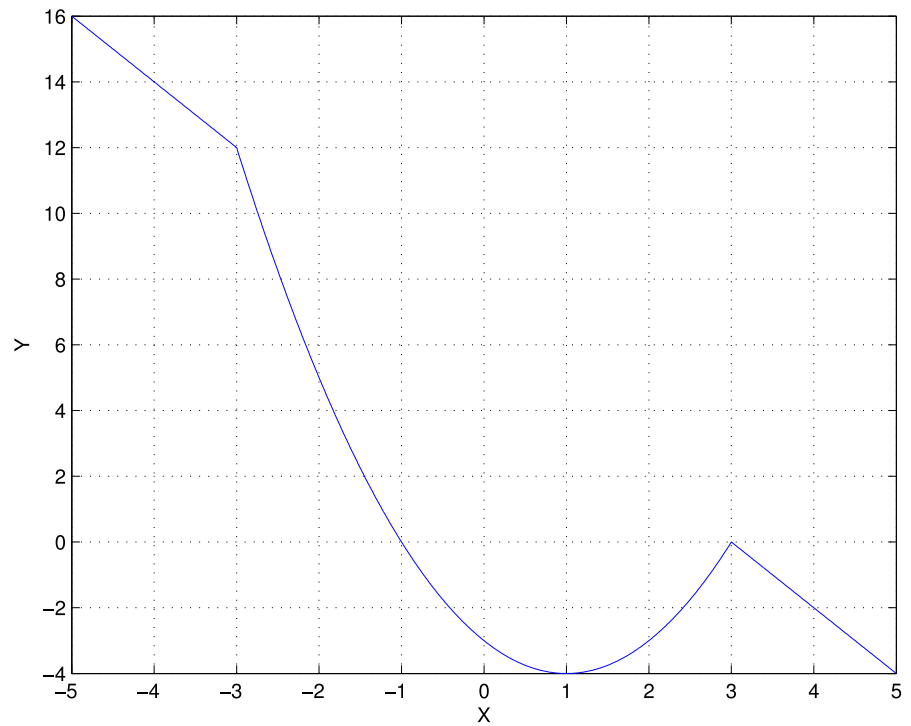
Damit erkennt man leichter:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{2}{x_1-3} &= \frac{1}{2} + \frac{2}{x_2-3} \Rightarrow & \frac{2}{x_1-3} &= \frac{2}{x_2-3} \\ &\Rightarrow & x_1-3 &= x_2-3 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad f_4 \text{ ist injektiv} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{x-3} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, \text{ so dass } \frac{1}{2} \notin W(f_4) \quad f_4 \text{ ist nicht surjektiv}$$

Somit ist f_4 nicht bijektiv.

- b. Siehe Abbildungen 1 und 2. Bemerkung: Da f_2 die Betragsfunktion ist, erhält man den Graphen von h , indem man den Teil des Graphen von g , welcher unterhalb der x -Achse liegt, an der x -Achse spiegelt.



c. Wir müssen die Gleichung $y = f_4(x)$ nach x auflösen:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{x+1}{2x-6} \Leftrightarrow x+1 = 2xy-6y \\
 &\Leftrightarrow 6y+1 = 2xy-x \\
 &\Leftrightarrow 6y+1 = x(2y-1) \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{6y+1}{2y-1}.
 \end{aligned}$$

Jetzt vertauschen wir noch die Variablen x und y und erhalten:

$$f_4^{-1} : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}, \quad x \mapsto \frac{6x+1}{2x-1}.$$

- d. Wir verwenden die Koordinatentransformationen (5) $f_5(x) \mapsto \frac{1}{f_5(x)}$ und (6) $f_5(x) \mapsto f_5\left(\frac{1}{x}\right)$. Zuerst (5): Für positive Funktionen $f_5(x)$ gilt, dass $f_5(x)$ und $\frac{1}{f_5(x)}$ an den gleichen Stellen lokale Extremalstellen besitzen, nur ihr Typ ändert sich: Was bei der einen Funktion minimal war, wird maximal, und umgekehrt. Also hat die Funktion $x \mapsto \frac{1}{|\tan(x^2+x)|}$ sicher eine positive, lokale Minimalstelle bei $x = -\frac{1}{2}$. Nun betrachten wir die Transformation (6). Sie macht eine ähnliche Vertauschung wie (5), nur nicht in der vertikalen Richtung auf den Werten, sondern in der horizontalen Richtung auf den Stellen. Es gilt nun $\tilde{f}_5\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{|\tan(x^2+x)|} = \frac{1}{f_5(x)}$. Vom letzten Ausdruck wissen wir bereits, dass er bei $x = -\frac{1}{2}$ eine positive, lokale Minimalstelle hat. Das heisst aber eingesetzt, dass $\tilde{f}_5\left(-\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = \tilde{f}_5(-2)$ ein positives, lokales Minimum ist.

Information

Aufgabe 3

Ziele: Lineare Asymptoten von verschiedenen Funktionen bestimmen, Graphen zeichnen

Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Funktionen, welche für alle reellen Zahlen $t > 0$ definiert sind, jeweils eine Asymptote der Form $at + b$ für $t \rightarrow +\infty$:

- $f(t) = \frac{t}{t+\sqrt{t}}$;
- $g(t) = \sqrt{4t^2 + 3}$;
- (♥) $h(t) = 3t + \cos(1/t)$;
- (♥) $i(t) = \ln(1 + e^t)$.

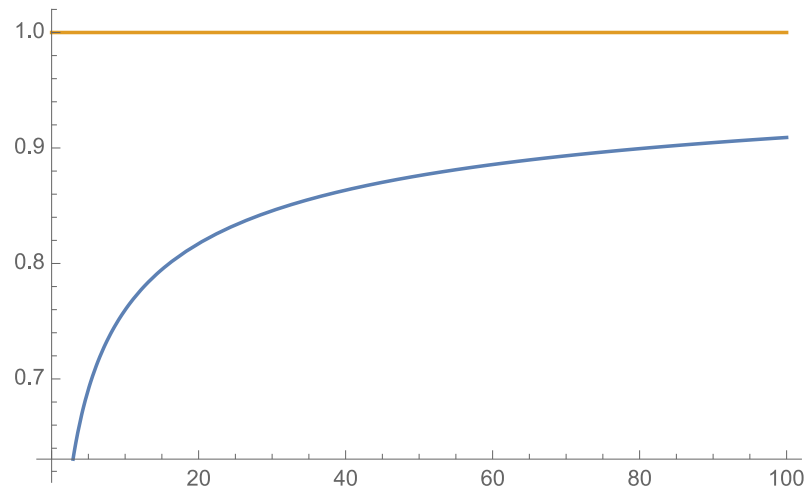
Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen und die dazugehörigen Asymptoten.

Lösung:

- a. Da

$$\frac{t}{t+\sqrt{t}} - 1 = \frac{-1}{\sqrt{t}+1} \rightarrow 0$$

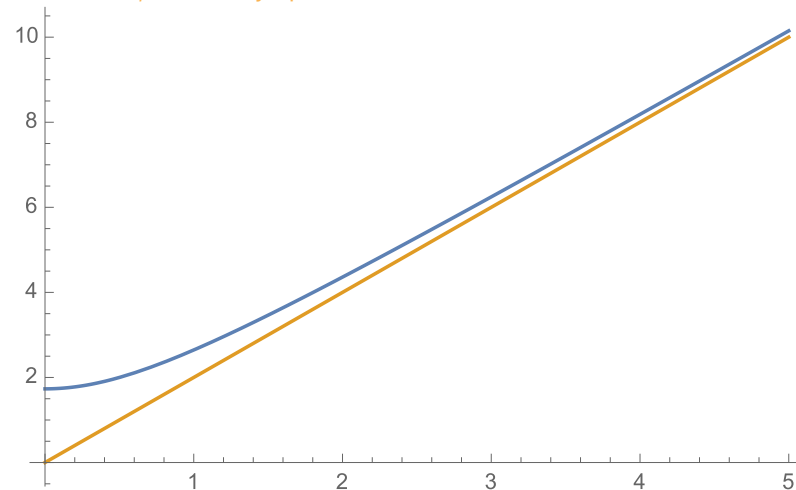
für $t \rightarrow \infty$, ist die Asymptote die Gerade $t \mapsto 1$.



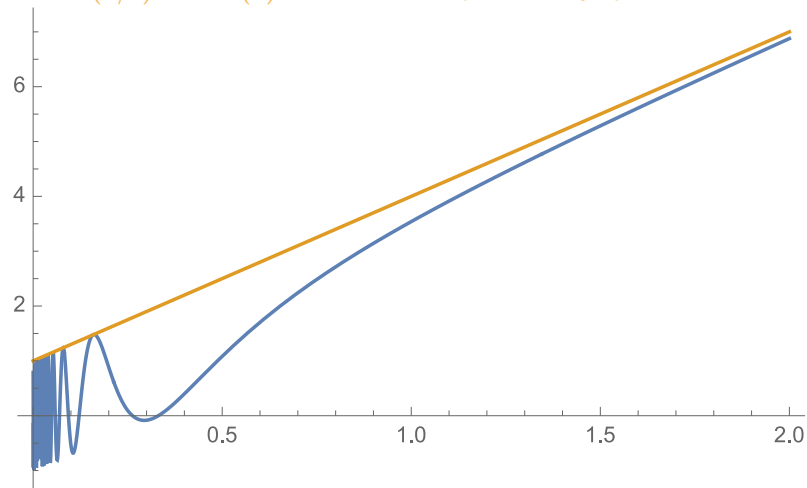
b. Da

$$\sqrt{4t^2 + 3} - 2t = \frac{3}{\sqrt{4t^2 + 3} + 2t} \rightarrow 0$$

für $t \rightarrow \infty$, ist die Asymptote die Gerade $t \mapsto 2t$.



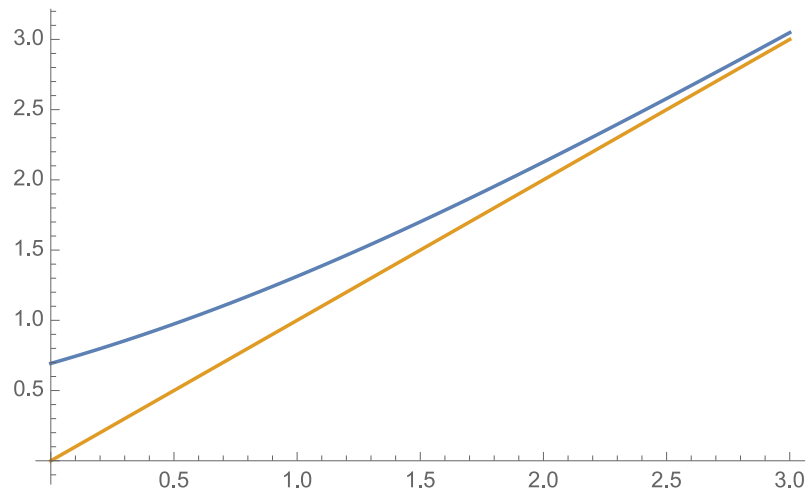
c. Da $\cos(1/t) \rightarrow \cos(0) = 1$ für $t \rightarrow \infty$, ist die Asymptote die Gerade $t \mapsto 3t + 1$.



d. Im Grenzwert $t \rightarrow \infty$ sollte die 1 in $1 + e^t$ gegenüber e^t keine Rolle spielen. Wenn wir sie weglassen, erhalten wir die Funktion $t \mapsto \ln(e^t) = t$, und wir probieren aus, ob das eine Asymptote ist: Da

$$\ln(1 + e^t) - t = \ln(1 + e^t) - \ln(e^t) = \ln(1 + e^{-t}) \rightarrow \ln(1) = 0$$

für $t \rightarrow \infty$, ist die Gerade $t \mapsto t$ also eine Asymptote.



Information

Aufgabe 4

Ziele: Textvorgabe in Funktionsdefinition umsetzen, Definitionsbereich bestimmen, Asymptote und Monotonie bestimmen, Parameter beachten

In der Modellierung von idealem Populationswachstum unter der Bedingung von beschränkten Ressourcen taucht folgende Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ auf:

$$f(t) := G \cdot \frac{1}{1 + e^{-k \cdot G \cdot t} \left(\frac{G}{m_0} - 1 \right)}$$

Dabei beschreibt $G > 0$ die maximale Populationsgrösse, die durch die Ressourcenbeschränktheit erreicht werden kann, $k > 0$ beschreibt die Wachstumsrate und $m_0 > 0$ ist eine beliebig grosse Startpopulation zum Zeitpunkt $t = 0$. Ein derartiges Wachstum taucht beispielsweise bei der Verbreitung eines infektiösen Krankheitserregers auf. Natürlich unter idealisierten Bedingungen.

- (♥) Bestimmen Sie eine möglichst einfache Asymptote von f für $t \rightarrow \infty$.
- Für welche m_0 und G kann der Definitionsbereich von f auf $\mathbb{R}$ ausgedehnt werden?
- Bestimmen Sie für die in b) bestimmten m_0 und G eine möglichst einfache Asymptote von f für $t \rightarrow -\infty$.
- Ist die Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ (strikt) monoton? Beantworten Sie die Frage in Abhängigkeit von m_0 und G .

Bemerkung: Wenn es Ihnen hilft, rechnen Sie zuerst mit $k = G = 1$ und stellen Sie erst danach auf beliebige $k, G > 0$ um.

Lösung:

- Eine Asymptote von f für $t \rightarrow \infty$ ist $g(t) = G$. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - g(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} G \cdot \frac{1}{1 + e^{-k \cdot G \cdot t} \left(\frac{G}{m_0} - 1 \right)} - G \\
 &= \frac{G}{\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + e^{-k \cdot G \cdot t} \left(\frac{G}{m_0} - 1 \right) \right)} - G \\
 &= \frac{G}{1 + \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-k \cdot G \cdot t} \left(\frac{G}{m_0} - 1 \right))} - G \\
 &= \frac{G}{1 + 0 \cdot \left(\frac{G}{m_0} - 1 \right)} - G = 0.
 \end{aligned}$$

- b. Falls $G < m_0$ ist $\frac{G}{m_0} - 1 < 0$. Da das Bild von $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(t) = e^{-k \cdot G \cdot t}$ ganz $(0, \infty)$ ist, gibt es in diesem Fall ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $1 + e^{-k \cdot G \cdot t_0} \left(\frac{G}{m_0} - 1 \right) = 0$ und $f(t_0)$ ist nicht definiert. Falls $G \geq m_0$, ist $\frac{G}{m_0} - 1 \geq 0$ und da die Exponentialfunktion nur positive Werte annimmt, ist der Nenner von $f(t)$ niemals 0. Also kann f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden.
- c. Falls $m_0 = G$ ist $\frac{G}{m_0} - 1 = 0$, also ist f in diesem Fall konstant gleich G und eine Asymptote für $t \rightarrow -\infty$ ist $g(t) = G$. Andernfalls ist $\frac{G}{m_0} - 1 > 0$ und wir haben $e^{-k \cdot G \cdot t} \left(\frac{G}{m_0} - 1 \right) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow -\infty$, da $e^{-x} \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow -\infty$. Da der Zähler von $f(t)$ konstant ist, gilt also $f(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow -\infty$ und somit ist $g(t) = 0$ eine Asymptote.
- d. Falls $m_0 = G$ ist $f(t) = G$, also ist f monoton steigend und monoton fallend, aber weder strikt monoton steigend noch strikt monoton fallend. Falls $G < m_0$, ist $e^{-k \cdot G \cdot t} \left(\frac{G}{m_0} - 1 \right)$ strikt monoton steigend, da $e^{-k \cdot G \cdot t}$ strikt monoton fallend ist und $\frac{G}{m_0} - 1 < 0$. Also ist der Nenner strikt monoton steigend. Da für alle $t \in [0, \infty)$ gilt, dass $f(t) > 0$, folgt, dass f strikt monoton fällt. Falls $G > m_0$ gilt analog, dass f strikt monoton steigt.

[◀ Schnellübung 0](#)

Direkt zu:

[Bonusaufgabe Woche 3:
Injektive Funktionen ▶](#)