

Aufgabe 1:

Ziele: Koordinatentransformationen anhand expliziter Funktion bestimmen, Graphen zeichnen, Veränderung in Worten beschreiben

(❤️) Ausgehend von der Funktion f_1 zeichnen Sie in einem Koordinatensystem mit der Einheit 2cm die Graphen der Funktionen f_1 bis f_6 . Beschreiben Sie auch in Worten, wie die Graphen von f_2 bis f_6 aus f_1 hervorgehen.

Hinweis: Auch wenn es nicht immer auf den ersten Blick so aussieht, lassen sich f_2 bis f_6 durch die bekannten 6 Transformationen aus der Vorlesung aus f_1 erstellen! Versuchen Sie, die passende Kombination herauszufinden, bevor Sie zu Hilfsmitteln greifen.

- a. $f_1: x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
- b. $f_2: x \mapsto \frac{1}{1+9x^2}$
- c. $f_3: x \mapsto \frac{8}{4+x^2}$
- d. $f_4: x \mapsto \frac{1}{2-2x+x^2}$
- e. $f_5: x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$
- f. $f_6: x \mapsto \frac{1}{4}(x^2 + 4)$

Aufgabe 2

Die Abgabe zu dieser Aufgabe wird von den Hilfsassistentierenden korrigiert.

Ziele: Injektivität, Surjektivität und Bijektivität bestimmen, Verkettung von Funktionen, Umkehrfunktion bestimmen

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto 2x - 6 \\ f_2 : \mathbb{R} &\rightarrow [0, \infty), & x &\mapsto |x| \\ f_3 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto \min\{x^2 - 9, 0\} \\ f_4 : \mathbb{R} \setminus \{3\} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto \frac{x+1}{f_1(x)}. \end{aligned}$$

Dabei ist $\min$ die Minimumsfunktion, d.h. $\min\{x^2 - 9, 0\}$ ist die jeweils kleinere Zahl von $x^2 - 9$ und 0, jeweils für jedes x separat bestimmt.

- (♥) Untersuchen Sie alle Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.
- (♥) Skizzieren Sie auf dem Intervall $[-5, 5]$ die Funktionen $g := f_3 - f_1$,

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_3(x) - f_1(x),$$

und $h := f_2 \circ g$,

$$h: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto f_2(g(x)).$$

- Bestimmen Sie die Umkehrfunktion

$$f_4^{-1}: W(f_4) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Bemerkung: Sie müssen $W(f_4) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ hier nicht explizit berechnen.

- Die Funktion $f_5 : x \mapsto |\tan(x^2 + x)|$ hat bei $x = -\frac{1}{2}$ eine positive, lokale Maximalstelle, d.h. die Funktionswerte in der Nähe von $x = -\frac{1}{2}$ sind alle höchstens $f_5(-\frac{1}{2})$ (Das müssen Sie nicht zeigen!). Zeigen Sie ohne Ableitungen zu verwenden: Die Funktion $\tilde{f}_5 : x \mapsto \frac{1}{f_5(\frac{1}{x})} = \frac{1}{|\tan(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x})|}$ hat bei $x = -2$ eine positive, lokale Minimalstelle.

Aufgabe 3

Ziele: Lineare Asymptoten von verschiedenen Funktionen bestimmen, Graphen zeichnen

Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Funktionen, welche für alle reellen Zahlen $t > 0$ definiert sind, jeweils eine Asymptote der Form $at + b$ für $t \rightarrow +\infty$:

- a. $f(t) = \frac{t}{t+\sqrt{t}}$;
- b. $g(t) = \sqrt{4t^2 + 3}$;
- c. (♥) $h(t) = 3t + \cos(1/t)$;
- d. (♥) $i(t) = \ln(1 + e^t)$.

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen und die dazugehörigen Asymptoten.

Aufgabe 4

Ziele: Textvorgabe in Funktionsdefinition umsetzen, Definitionsbereich bestimmen, Asymptote und Monotonie bestimmen, Parameter beachten

In der Modellierung von idealem Populationswachstum unter der Bedingung von beschränkten Ressourcen taucht folgende Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ auf:

$$f(t) := G \cdot \frac{1}{1 + e^{-k \cdot G \cdot t} \left(\frac{G}{m_0} - 1 \right)}$$

Dabei beschreibt $G > 0$ die maximale Populationsgrösse, die durch die Ressourcenbeschränktheit erreicht werden kann, $k > 0$ beschreibt die Wachstumsrate und $m_0 > 0$ ist eine beliebig grosse Startpopulation zum Zeitpunkt $t = 0$. Ein derartiges Wachstum taucht beispielsweise bei der Verbreitung eines infektiösen Krankheitserregers auf, natürlich unter idealisierten Bedingungen.

- (❤️) Bestimmen Sie eine möglichst einfache Asymptote von f für $t \rightarrow \infty$.
- Für welche m_0 und G kann der Definitionsbereich von f auf $\mathbb{R}$ ausgedehnt werden?
- Bestimmen Sie für die in b) bestimmten m_0 und G eine möglichst einfache Asymptote von f für $t \rightarrow -\infty$.
- Ist die Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ (strikt) monoton? Beantworten Sie die Frage in Abhängigkeit von m_0 und G .

Bemerkung: Wenn es Ihnen hilft, rechnen Sie zuerst mit $k = G = 1$ und stellen Sie erst danach auf beliebige $k, G > 0$ um.