

Status	Beendet
Begonnen	Dienstag, 29. September 2026, 16:56
Abgeschlossen	Dienstag, 29. September 2026, 16:56
Dauer	8 Sekunden

Information

Aufgabe 1:

Ziele: Definitionsbereich eines Ausdrucks bestimmen, Nullstellen und Vorzeichen bestimmen, Graphen zeichnen

(❤️) Gegeben sei die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2 - 2x}.$$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen von f . Für welche Werte von x ist die Funktion f positiv? Für welche negativ? Skizzieren Sie den Graph $\Gamma(f)$.

Hinweis: für den Graph können Sie z.B. das Bild ausgewählter Werte im Definitionsbereich berechnen und dann die Punkte miteinander verbinden. Was passiert mit der Funktion f in Umgebungen der Nullstellen des Nenners?

Lösung:

f ist eine rationale Funktion und lässt sich wie folgt faktorisieren

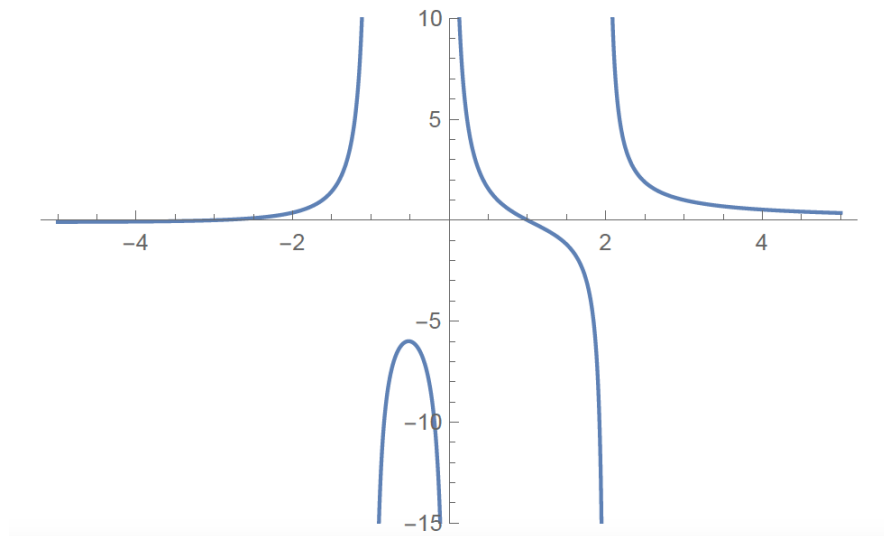
$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{(x + 3)(x - 1)}{x(x - 2)(x + 1)}.$$

Wie jede rationale Funktion ist f überall in $\mathbb{R}$ ausser in den Nullstellen des Nenners definiert. Somit ist der maximale Definitionsbereich von f die Menge $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 2\}$. Die Nullstellen von f sind genau die Nullstellen des Zählers, nämlich -3 und 1 . Nach Untersuchung der Vorzeichen der Faktoren im Zähler und im Nenner folgt, dass

$$P = (-3, -1) \cup (0, 1) \cup (2, \infty)$$

$$N = (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (1, 2),$$

wobei P die Menge, in der f positiv ist, und N die Menge, in der f negativ ist, bezeichnet. Der Graph $\Gamma(f)$ ist:



Information

Aufgabe 2:

Ziele: Komplizierte Funktionsdefinition verstehen, daraus resultierende Funktion beschreiben.

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Gegeben sei das Polynom

$$p_x(y) = y^3 + 4y^2 + xy.$$

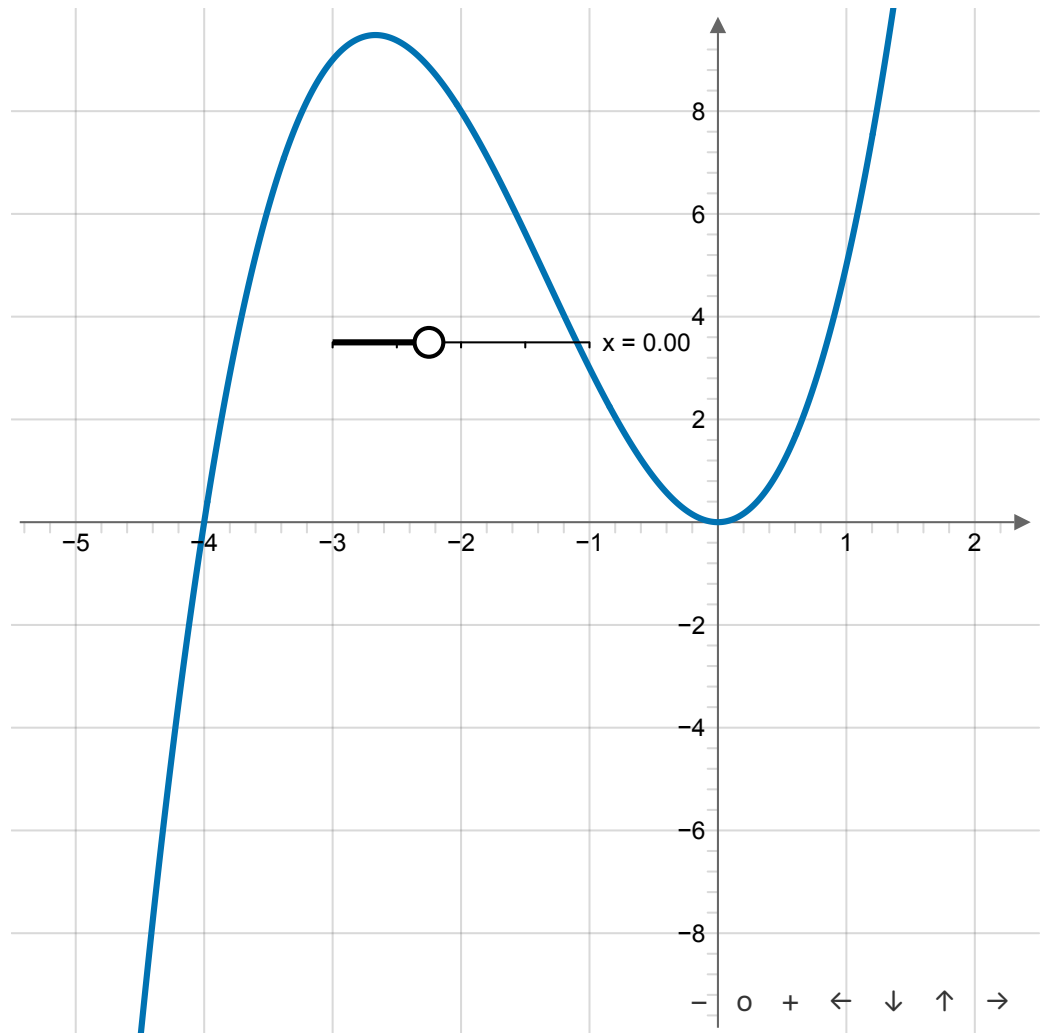
Wir definieren eine Funktion f durch

$$f: x \mapsto \text{kleinste Nullstelle von } p_x(y).$$

Beschreiben Sie f durch eine Formel und skizzieren Sie den Graphen von f . Ist f stetig? Gibt es ein x mit $f(x) = -\pi$? (Sie müssen x dazu nicht berechnen!)

Lösung:

Um diese Funktion etwas besser zu verstehen, zeichnen wir erst mal p_x für verschiedene x :



Die Funktion f weist nun jedem x die kleinste Nullstelle dieses kubischen Polynoms zu. Es gilt $p_x(y) = y(y^2 + 4y + x)$, und deshalb hat p_x die Nullstellen

$$y_0 = 0, \quad y_{\pm} = -2 \pm \sqrt{4 - x},$$

wobei man $y_{\pm}$ mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen berechnet (auch bekannt als a-b-c oder p-q Formel).

Weil $4 - x < 0$ für $x > 4$ ist $y_{\pm}$ keine reelle Nullstelle von p_x für $x > 4$. Dies sieht man auch in der oberen Grafik sehr gut, wenn man den Slider über $x = 4$ zieht: Es entstehen bzw. verschwinden zwei Nullstellen.

Weiterhin ist $y_- \leq y_+ \leq y_0$ falls $x \leq 4$. Fügt man diese beiden Erkenntnisse zusammen, erhält man, dass die kleinste Nullstelle von p_x gegeben ist durch

$$\begin{cases} -2 - \sqrt{4 - x} & x \leq 4 \\ 0 & x > 4. \end{cases}$$

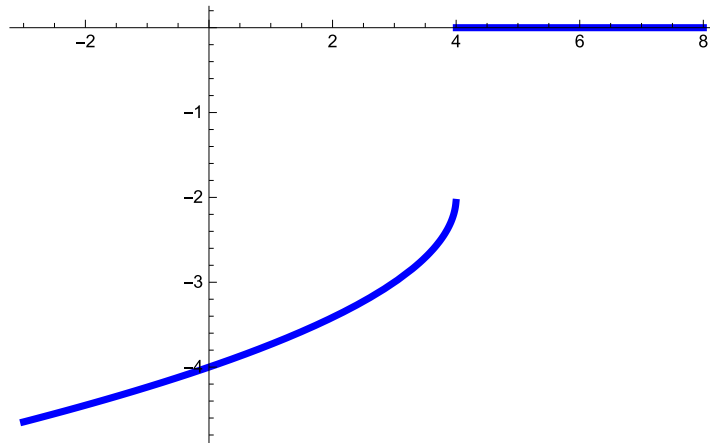
Die Funktion f ist somit nicht stetig bei $x = 4$. In der Tat sind

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -2.$$

Wir wollen noch zeigen, dass es ein x mit $f(x) = -\pi$ gibt. Es gilt

$$f(0) = -4 \leq -\pi \quad \text{und} \quad f(3) = -3 \geq -\pi.$$

Da f auf $(-\infty, 4)$ stetig ist, impliziert der Zwischenwertsatz, dass es ein $x \in [0, 3]$ mit $f(x) = -\pi$ existiert.



Information

Aufgabe 3:

Die Abgabe zu dieser Aufgabe wird von den Hilfsassistentierenden korrigiert.

Ziele: Trigonometrische Funktionen am Kreis auffrischen, Beziehungen geometrisch herleiten

Es sei $A := (x, y)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis, d.h. $x^2 + y^2 = 1$. Weiter sei $B := (0, 0)$ der Ursprung des Koordinatensystems und $C := (x, 0)$ der Punkt auf der x -Achse mit derselben x -Koordinate wie A . Es bezeichne ABC das Dreieck mit den Eckpunkten A , B und C (siehe die Figur weiter unten). Wir definieren $\alpha \in [0, 2\pi]$ als die Länge des Kreisbogens von Punkt $(1, 0)$ bis zum Punkt A , wenn man den Einheitskreis im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

- (♥) Skizzieren Sie das Dreieck ABC im Spezialfall $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AC}$ in diesem Spezialfall. Was ist somit $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$? Und $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$?
- (♥) Zeigen Sie unter Verwendung der Beziehungen im Dreieck ABC :

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

für alle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Wieso gilt somit

$$-\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

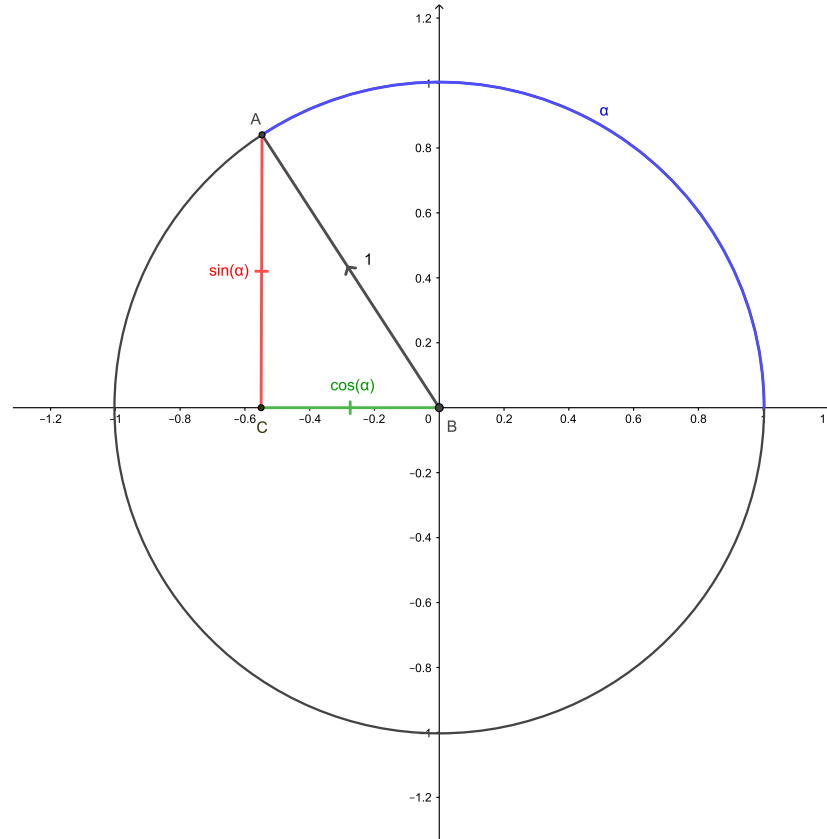
für alle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$? (Bemerkung: Die hergeleiteten

Beziehungen zwischen $\sin$ und $\cos$ in dieser Teilaufgabe gelten sogar für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

- c. (♥) Zeigen Sie unter Verwendung der Beziehungen im Dreieck ABC :

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha),$$

für alle $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. (Bemerkung: Die hergeleitete Beziehung in dieser Teilaufgabe gilt sogar für alle $\alpha \in \mathbb{R}$).



- d. Es sei $\arctan$ die Umkehrfunktion von $\tan$. Zeigen Sie die Gleichheit

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

für alle $x \geq 0$ mit Hilfe eines geeigneten Dreiecks ABC . (Es ist sinnvoll ein Dreieck zu verwenden bei dem eine Seite die Länge 1 hat).

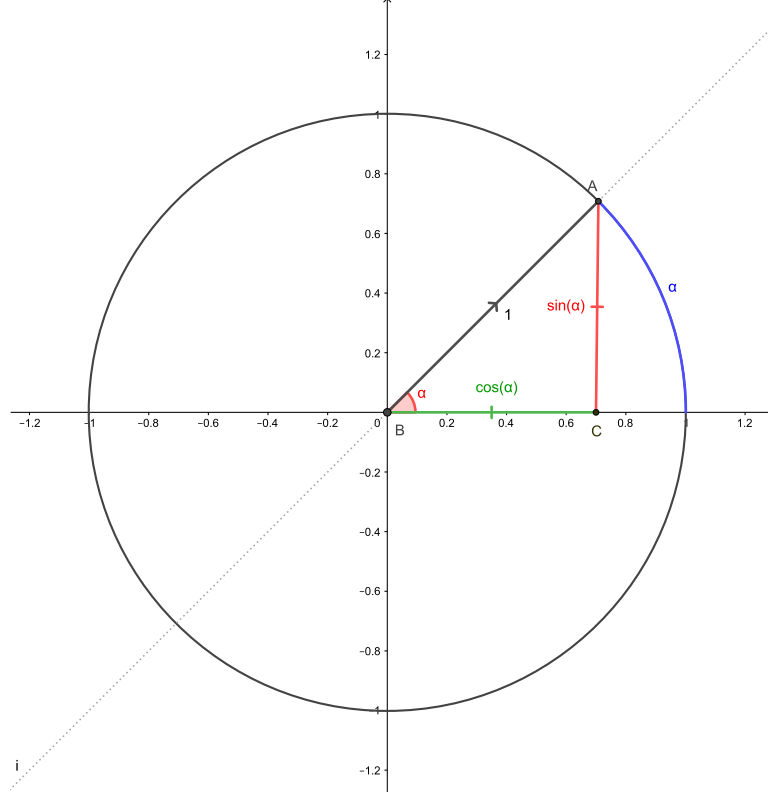
Lösung:

- a. Das Dreieck ABC ist ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit Hypotenuse $\overline{AB}$. Dies folgt, weil die Strecke AB auf der ersten Winkelhalbierenden liegt. Nach Pythagoras gilt

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2.$$

Folglich $1 = 2\overline{AC}^2$ und deshalb $\overline{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

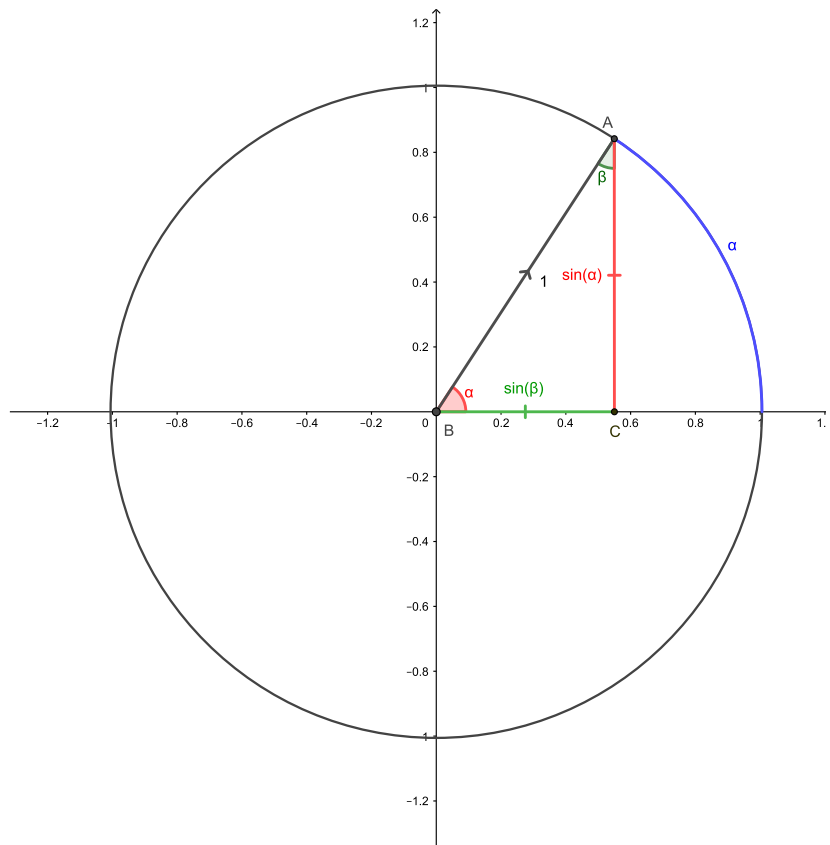
Deshalb $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Skizze:



- b. Weil $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, folgt dass der Winkel $\angle ABC = \alpha$ (d.h. der Innenwinkel des Dreiecks ABC beim Punkt B ist gleich α). Weil die Innenwinkelsumme im Dreieck π beträgt, lässt sich folgende Rechnung durchführen

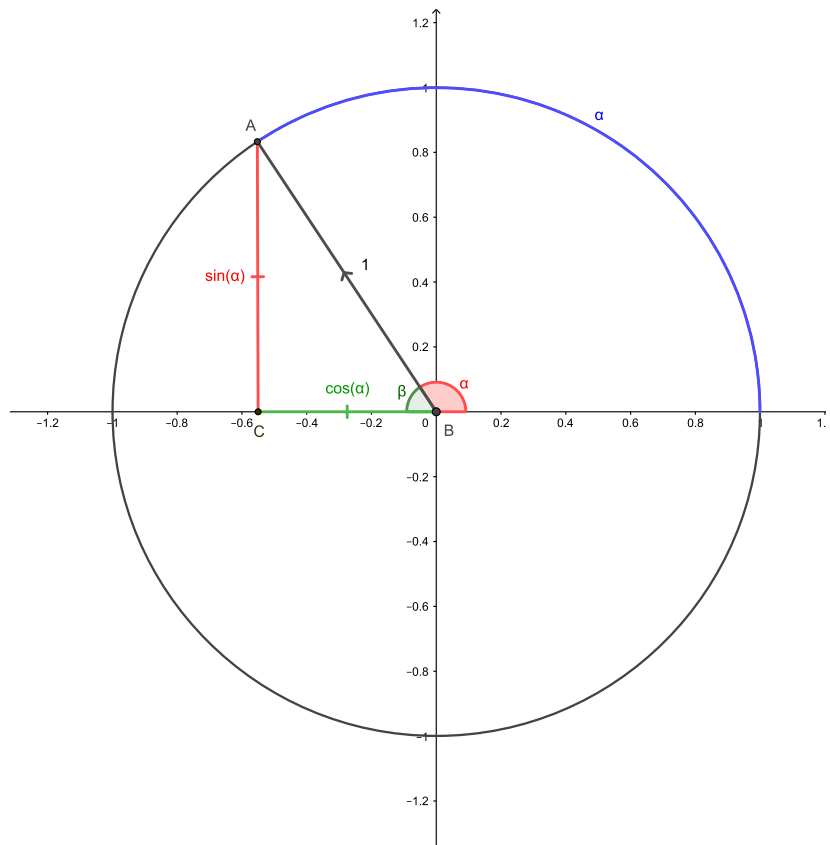
$$\pi = \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \alpha + \frac{\pi}{2} + \angle CAB,$$

also $\angle CAB = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Wir setzen $\beta = \angle CAB$. Man entnimmt der untenstehenden Figur, dass $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\beta) = \cos(\alpha)$, wie gewünscht.



Des Weiteren gilt $\sin(x) = -\sin(-x)$, also $\cos(\alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\sin(\alpha - \frac{\pi}{2})$, was noch zu zeigen war.

- c. Weil $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, folgt dass der Winkel $\angle ABC = \pi - \alpha$ (d.h. der Innenwinkel des Dreiecks ABC beim Punkt B ist gleich $\pi - \alpha$). Setze $\beta = \angle ABC$. Wie man dem untenstehenden Bild entnehmen kann, gilt $\cos(\pi - \alpha) = \cos(\beta) = |\cos(\alpha)|$. Weil $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ folgt weiterhin $\cos(\alpha) \leq 0$, siehe ebenfalls das untenstehende Bild. Somit gilt $|\cos(\alpha)| = -\cos(\alpha)$ und deshalb $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$, was zu zeigen war.



- d. Es sei $A := (0, 0)$, $C := (1, 0)$, $B := (1, x)$. Das Dreieck ABC ist rechtwinklig mit Hypotenuse $\overline{AB}$. Weiter gilt $\overline{AC} = 1$ und $\overline{CB} = x$. Es sei $\alpha := \angle BAC$ (d.h. der Innenwinkel des Dreiecks ABC beim Punkt A ist gleich α). Nach Konstruktion gilt

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{x}{1} = x.$$

Folglich, weil $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\arctan(x) = \alpha$. Wir berechnen

$$\sin(\arctan(x)) = \sin(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

wobei die Strecke $\overline{AB}$ mittels Pythagoras ausgerechnet wurde.