

Aufgabe 1:

Ziele: Definitionsbereich eines Ausdrucks bestimmen, Nullstellen und Vorzeichen bestimmen, Graphen zeichnen

(❤️) Gegeben sei die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2 - 2x}.$$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen von f . Für welche Werte von x ist die Funktion f positiv? Für welche negativ? Skizzieren Sie den Graph $\Gamma(f)$.

Hinweis: für den Graph können Sie z.B. das Bild ausgewählter Werte im Definitionsbereich berechnen und dann die Punkte miteinander verbinden. Was passiert mit der Funktion f in Umgebungen der Nullstellen des Nenners?

Aufgabe 2:

Ziele: Komplizierte Funktionsdefinition verstehen, daraus resultierende Funktion beschreiben.

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Gegeben sei das Polynom

$$p_x(y) = y^3 + 4y^2 + xy.$$

Wir definieren eine Funktion f durch

$$f: x \mapsto \text{kleinste Nullstelle von } p_x(y).$$

Beschreiben Sie f durch eine Formel und skizzieren Sie den Graphen von f . Ist f stetig? Gibt es ein x mit $f(x) = -\pi$? (Sie müssen x dazu nicht berechnen!)

Aufgabe 3:

Die Abgabe zu dieser Aufgabe wird von den Hilfsassistentierenden korrigiert.

Ziele: Trigonometrische Funktionen am Kreis auffrischen, Beziehungen geometrisch herleiten

Es sei $A := (x, y)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis, d.h. $x^2 + y^2 = 1$. Weiter sei $B := (0, 0)$ der Ursprung des Koordinatensystems und $C := (x, 0)$ der Punkt auf der x -Achse mit derselben x -Koordinate wie A . Es bezeichne ABC das Dreieck mit den Eckpunkten A , B und C (siehe die Figur weiter unten). Wir definieren $\alpha \in [0, 2\pi]$ als die Länge des Kreisbogens von Punkt $(1, 0)$ bis zum Punkt A , wenn man den Einheitskreis im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

- (♥) Skizzieren Sie das Dreieck ABC im Spezialfall $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AC}$ in diesem Spezialfall. Was ist somit $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$? Und $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$?
- (♥) Zeigen Sie unter Verwendung der Beziehungen im Dreieck ABC :

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

für alle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Wieso gilt somit

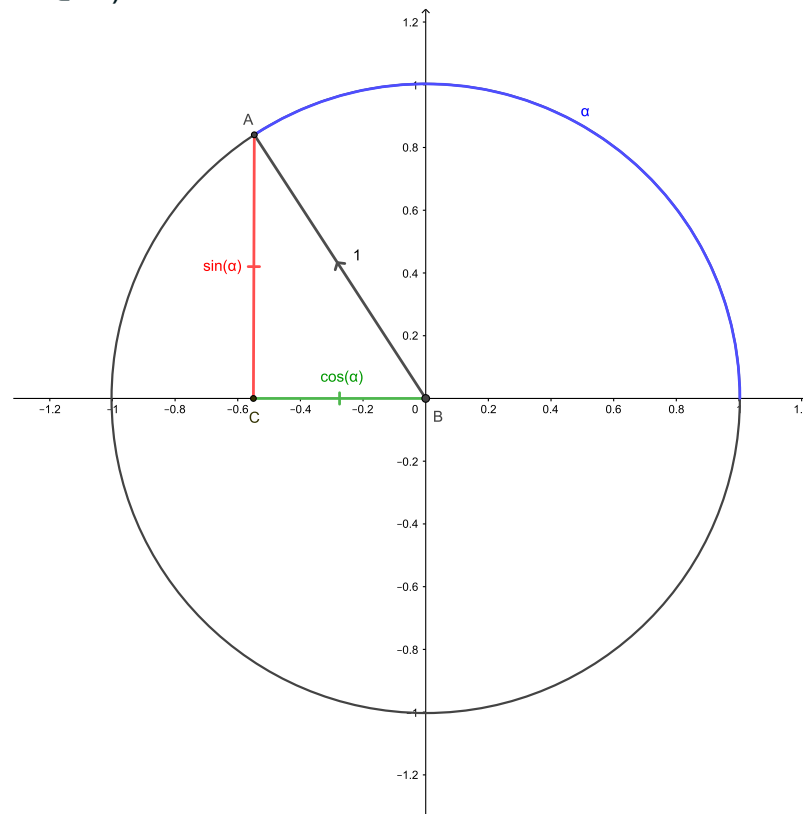
$$-\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

für alle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$? (Bemerkung: Die hergeleiteten Beziehungen zwischen $\sin$ und $\cos$ in dieser Teilaufgabe gelten sogar für alle $\alpha \in \mathbb{R}$).

- c. (♥) Zeigen Sie unter Verwendung der Beziehungen im Dreieck ABC :

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha),$$

für alle $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. (Bemerkung: Die hergeleitete Beziehung in dieser Teilaufgabe gilt sogar für alle $\alpha \in \mathbb{R}$).



- d. Es sei $\arctan$ die Umkehrfunktion von $\tan$. Zeigen Sie die Gleichheit

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

für alle $x \geq 0$ mit Hilfe eines geeigneten Dreiecks ABC . (Es ist sinnvoll ein Dreieck zu verwenden bei dem eine Seite die Länge 1 hat).

◀ Bonusaufgabe
Woche 02:
Grenzwerte von
Funktionen

Zur Aktivität

Abgabe Serie 2 ▶