

Information

Aufgabe 1:

Ziele: Repetition von wichtigen Rechenmethoden: Polynome, Brüche, Wurzeln, Potenzen, Logarithmen

(❤️) Wir werden dieses Semester viel rechnen. Beherrschen Sie die wichtigsten algebraischen Umformungen noch? Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$. Vereinfachen Sie soweit wie möglich (ohne Taschenrechner!).

a. $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

b. $\frac{a^2-b^2}{a-b}$

c. $\frac{\frac{a-b}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

d. Für $|a| \neq 8$:

$$\frac{3a+a^2}{a-8} - \frac{2a-2}{8+a} + (64 - a^2)^{-1} \cdot (a^3 + a^2 + 42a + 31 \cdot 2^4)$$

e. Für $a, b \neq 0$: $\ln(ab) + \ln\left(\frac{a^2}{b}\right) - 2\ln(ab)$

f. Für welches positive $a \in \mathbb{R}$ gilt $\log_a 5 = \frac{1}{2}$?

g. Für welches $a \in \mathbb{R}$ gilt $7^{2a} = 2$?

Information

Aufgabe 2:

Die Abgabe zu dieser Aufgabe wird von den Hilfsassistentierenden korrigiert.

Ziele: Eigenschaften von Folgen untersuchen, Verhalten von rekursiven Folgen erkennen, Konvergenz und Grenzwerte bestimmen

In der ersten Vorlesung haben wir Folgen sowie ein paar Begriffe dazu kennengelernt. Diese sollten wir festigen. Untersuchen Sie zu diesem Zweck die nachstehenden Folgen. Sind sie beschränkt? Sind sie monoton? Konvergieren sie? Wenn ja: Was ist ihr Grenzwert?

- a. (♥) $a_n = \cos \frac{\pi n}{3}$.
- b. $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2}$.
- c. (♥) $a_n = \frac{3n^4 - 5n^2 + 2}{7n^4 - 4n^3}, n \geq 1$.
- d. (♥) $a_{n+1} := 2a_n^2 - 1$ mit $a_0 = -1$.
- e. (♥) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$
für $n \geq 3$.
- f. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
- g. $a_n = \sqrt{(n+1)n} - n$.

Information

Aufgabe 3:

Ziele: Monotonie für rekursive Folge bestimmen, Tricks für Konvergenzbestimmung kennenlernen

Eine wichtige und sehr klassische Folge ist die **Fibonacci-Folge**: Es sei die Folge (a_n) gegeben durch das rekursive Gesetz

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, den Grenzwert der Folge $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, wobei $n \geq 1$, zu bestimmen. Die Teilaufgaben werden hier nach und nach schwieriger, Teil (e) ist schon ordentlich zum Knobeln!

- a. (❤️) Begründen Sie, wieso die Folge (a_n) monoton wachsend ist und wieso die Folge (b_n) beschränkt ist.
- b. Es sei

$$c_n = a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3.$$

Zeigen Sie, dass $c_n = -c_{n-1}$ für alle $n \geq 4$.

- c. Begründen Sie, dass $c_n = (-1)^{n+1}$ gilt.
- d. Verwenden Sie jeweils Teilaufgabe c. um zu zeigen, dass die Folge $(b_{2n})_n$, wobei $n \geq 1$, monoton fallend ist und dass die Folge $(b_{2n+1})_n$, wobei $n \geq 1$, monoton wachsend ist.
- e. (⭐) Begründen Sie unter Zuhilfenahme der vorangehenden Teilaufgabe, dass die Folge (b_n) gegen den goldenen Schnitt $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.

◀ STACK:
Einführendes
Syntax-Quiz

Zur Aktivität



Abgabe Serie 1 ▶