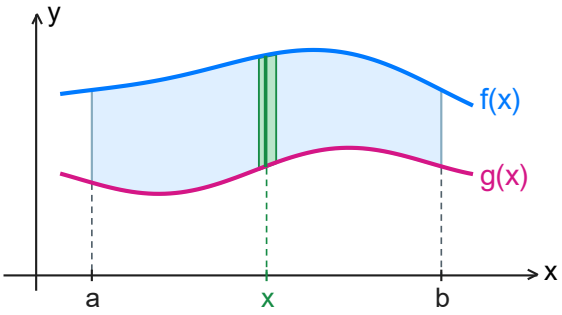
Analysis 1 - Übung 11

Flächen zwischen zwei Kurven

$$A = \int_a^b \qquad dx \qquad (f \geq g)$$



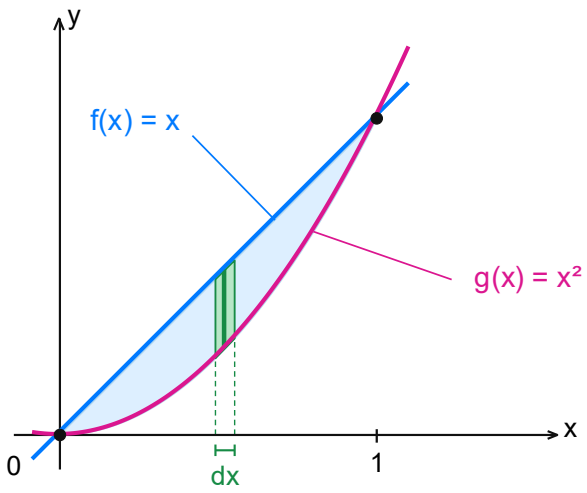
Bsp.
Geg.: $f(x) = x,\ g(x) = x^2$

Ges.: Die Fläche zwischen den beiden Schnittpunkten

Wo schneiden sich die Kurven?
Welche liegt dazwischen oben?

$=$ $\Longrightarrow$ oder

$$A = \int \qquad dx = \Big[\qquad \Big] = \qquad =$$



Wechseln die Kurven ihre Reihenfolge, teile das Integral am Schnittpunkt auf

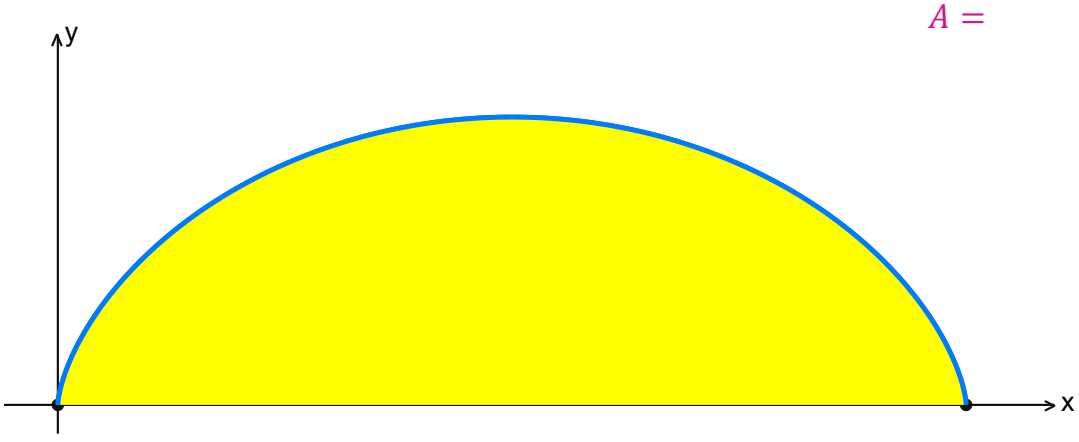
Flächenberechnung in Parameterform (Fläche unter der Kurve)

Parametrisierungen $\bar{r} = (x(t), y(t))^T$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\ dt$$

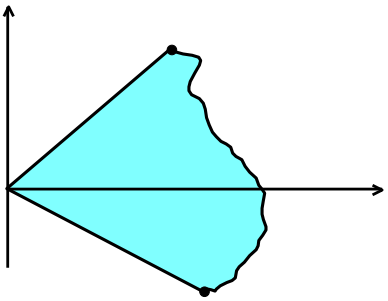
$A =$ dt

$A =$



Sektorfläche(vom Ortsvektor überstrichene Fläche)

$$A = \frac{1}{2}\left|\int_{t_1}^{t_2} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\ dt\right|$$

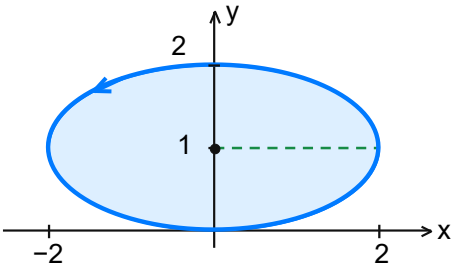


Bsp.:

Geg.: $x = 2\cos t$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$y = 1 + \sin t$

Ges.: Die Fläche der Ellipse



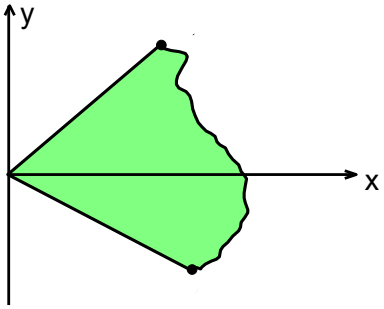
=

= ( ) = =

$A = \frac{1}{2}\int$ $dt =$ = =

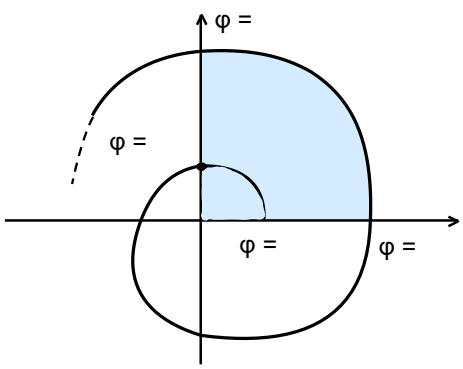
Sektorfläche in Polarkoordinaten

$$A = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)^2\, d\varphi$$



Bsp.: Geg.: Die Spirale $r(\varphi) = e^{\varphi}$.

Ges.: Die Fläche zwischen den beiden eingezeichneten Windungen im ersten Quadranten



$A = \frac{1}{2}\int$ $d\varphi$

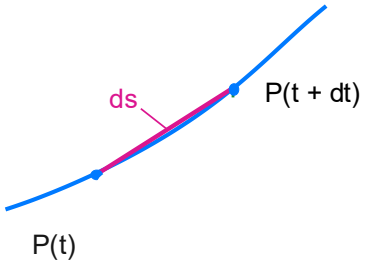
$= \frac{1}{2}$

$A = -($ $)$

Bogenlänge einer ebenen Kurve

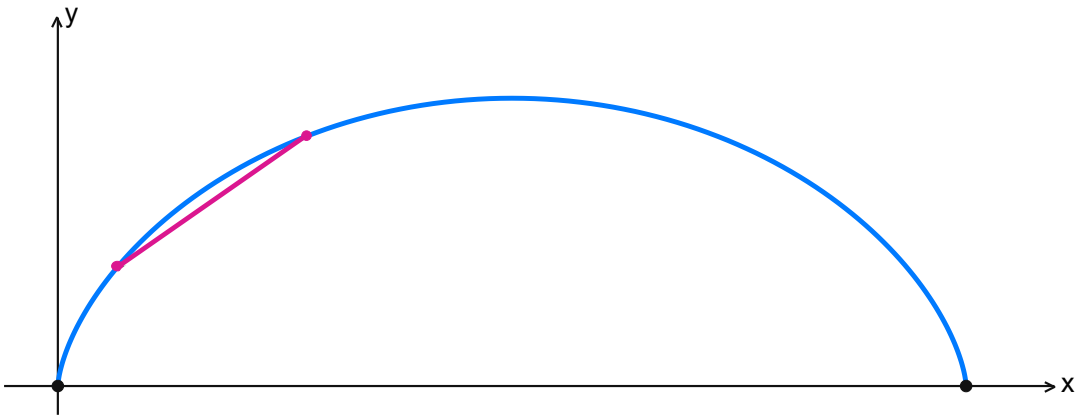
Stell dir einen Faden entlang der Kurve vor.
Beim Abrollen addieren sich viele kurze Wegstücke.
Für jedes Stück hilft Pythagoras.

$$L = \int_a^b \sqrt{\qquad\qquad}$$



Geg.: Ein Bogen der Zykloide aus Übung 9: $x(t) = t - \sin t$
$y(t) = 1 - \cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$

Ges.: Wie lang ist der Weg von einer Spitze zur nächsten?



=

=

\+ = = =

Auf diesem Bogen liegt zwischen und Deshalb ist ≥

= = = = =

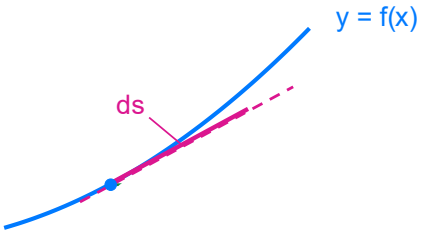
= =

$L = \int \qquad dt = \int \qquad = \qquad = (\qquad) =$

Bogenlänge als Graph oder Polarkurve

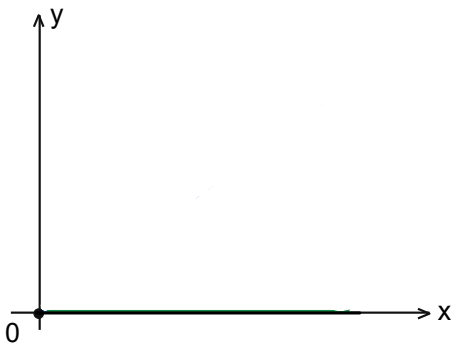
Ein Graph

$$L = \int_a^b \sqrt{\quad + \quad}\ ,$$



Bsp.: Geg.: $y = \frac{3}{4}x$ für $0 \le x \le 4$

Ges.: Die Länge der Strecke
Wie kannst du das Ergebnis mit einer Skizze prüfen?

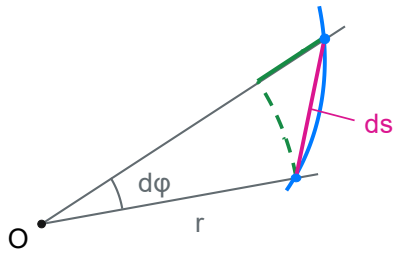


$=$ $=$

$$L = \int_0^4 \quad dx = \Big[\quad = $$

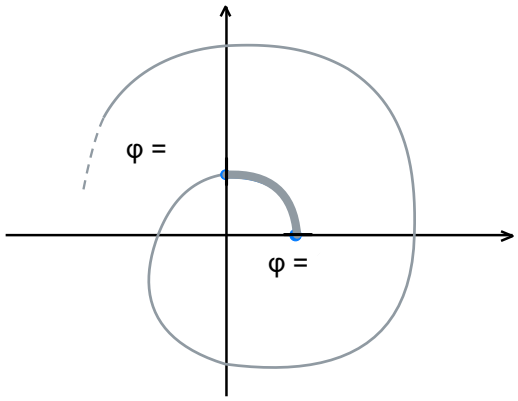
Eine Polarkurve

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\qquad\qquad}$$



Geg.: Wieder die Spirale $r(\varphi) = e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi/2$

Ges.: Die Länge des Spiralbogens



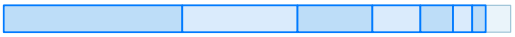
$=$ $=$ $=$

$$L = \int_0^{\pi/2} \quad d\varphi = \quad = \quad (\quad)$$

Geometrische Reihen

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_0\, q^k = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_0\, q^n = \frac{a_0}{1-q}$$

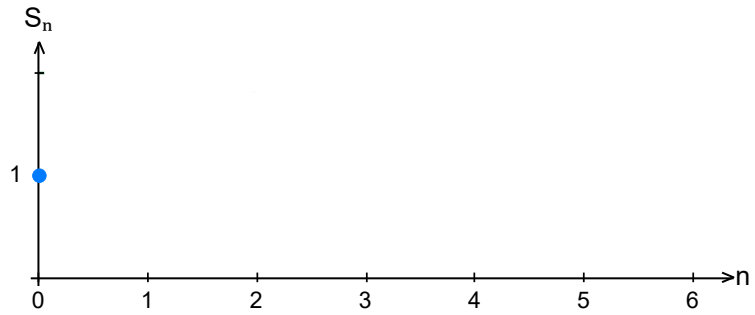


Geg.: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ $=$ $=$

Ges.: Die ersten vier Partialsummen und ihr Grenzwert

$S_2 =$ $+$ $=$ $+$ $=$ $S_3 =$ $+$ $=$ $+$ $=$

$S_0 =$ $S_1 =$ $S_2 =$ $S_3 =$



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots =$$

Folge

Folgenglied

Endliche Summe

Partialsumme

Partialsummenfolge

Unendliche Reihe

Reihenwert(Summe der Reihe)

Potenzreihen und Konvergenzradius

Eine Potenzreihe ist eine ganz Reihe ~ « »
«Potenzreihe um den Punkt »

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad x_0:$$

Bsp

= = $\rightarrow konvergiert\ f\ddot{u}r$ <

——— $= \sum_{n=0}^{\infty}$ = $\rightarrow konvergiert\ f\ddot{u}r$ < $oder$ <

—— = —— = = $\sum_{n=0}^{\infty}$ $\rightarrow konvergiert\ f\ddot{u}r$ < $oder$ <

—— = $\sum_{n=0}^{\infty}$ = $\sum_{n=0}^{\infty}$ = $\sum_{n=0}^{\infty}$ → = → $\sum^{\infty}$

Tabelle: S.79

= = $\sum_{n=0}^{\infty}$

= = $\sum_{n=0}^{\infty}$ ———

= $\sum_{n=0}^{\infty}$ $\sum_{n=0}^{\infty}$ = $\sum_{n=0}^{\infty}$ = ⋯

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \quad \bullet$$

Bsp. Bestimme die ersten vier Koeffizienten der Potenzreihe von $\frac{\sin(x)}{e^x}$

um des Zentrum $x_0 = 0$

$\frac{\sin(x)}{e^x} =$ + + +

$\sin(x) = ($ $)$

$= ($ $) \bullet ($ $)$

: = → =

: = → =

: = → =

: = + → =

Konvergenzradius

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \quad \right|$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad x_0\text{: Zentrum}$$



Innerhalb des
die Potenzreihe
und

h

s darf man

Für $|x - x_0| < R$ die Reihe absolut
Für $|x - x_0| > R$ sie

Bsp.:
Geg.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

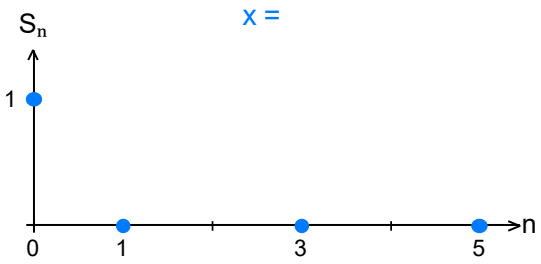
Ges.: Zentrum, Radius und alle x, für die die Reihe konvergiert

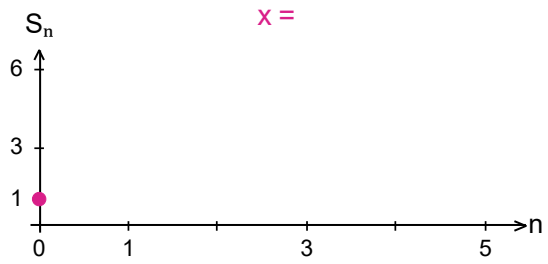
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \qquad\qquad = \sum_{n=0}^{\infty}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\quad}{\quad} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \quad \cdot \quad \right| =$$

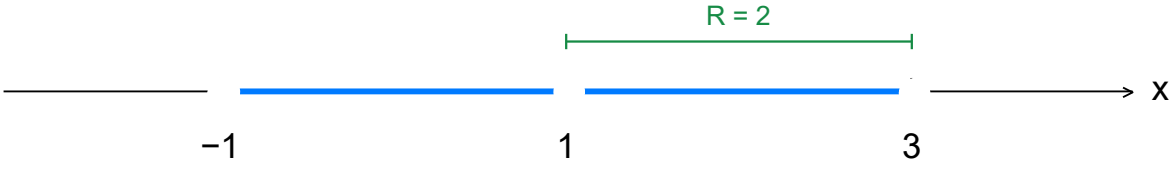
$$x_0 - R < \mathrm{x} < \mathrm{x_0} + \mathrm{R} \Rightarrow \qquad < x <$$

$x =$: $x =$





Partialsummen zwischen und Partialsummen wachsen Grenze

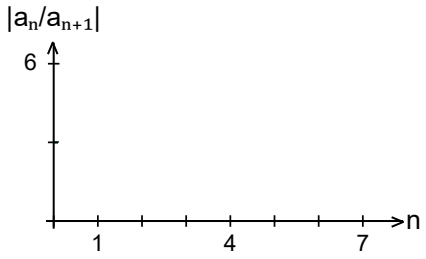


$x_0 =$ $R =$ $< x <$

Bsp.:

Geg.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \bullet 3^n}$$



Ges.: Konvergenzradius und Konvergenzbereich.

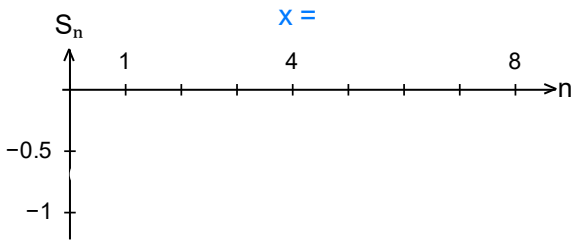
$a_n =$ $=$ $\bullet$ $=$ $\bullet$ $\longrightarrow$ $=$

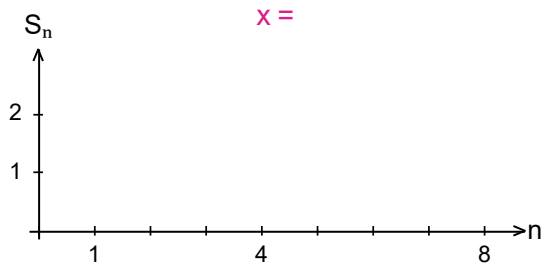
$|x-2| <$ $\Leftrightarrow$ $< x <$

Was passiert bei x = −1 und x = 5?

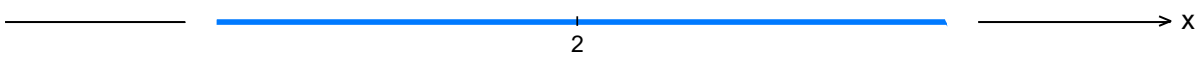
Links entsteht $\sum_{n=1}^{\infty}$ Rechts entsteht die Reihe

=





$R = 3,$ $x \in$,



Tipps zur Serie 11 · Aufgaben 1 und 2

1 Flächen in Polarkoordinaten

Geg.: $r = \sqrt{\varphi}$, $r = 1/(1+\varphi)$, $r = |\sin\varphi|$ und $r = 2a(1+\cos\varphi)$, jeweils für $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Ges.: Die Fläche für jede der vier Kurven.

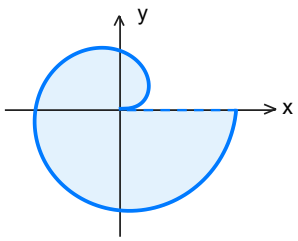
$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\varphi)^2 \, d\varphi$$

a) Quadriere die Wurzel. Was bleibt als Integrand übrig?

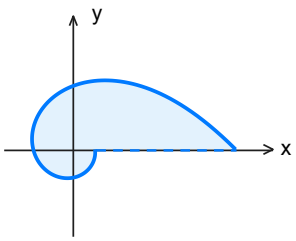
b) Schreibe den quadrierten Bruch als $(1+\varphi)^{-2}$.

c) Nach dem Quadrieren gilt $|\sin\varphi|^2 = \sin^2\varphi$.

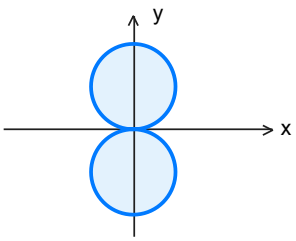
d) Multipliziere $(1+\cos\varphi)^2$ aus. Nutze die Halbwinkelformel.



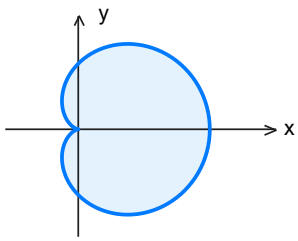
a) r = √φ



b) r = 1/(1 + φ)



c) r = |sin φ|



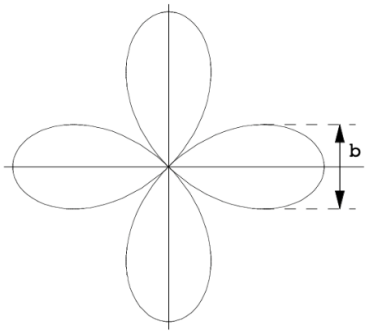
d) r = 2a(1 + cos φ)

2 Das Kleeblatt

Geg.: $r(\varphi) = a|\cos(2\varphi)|$, $a > 0$.

Ges.: Die Gesamtfläche und die Breite b des rechten Blattes.

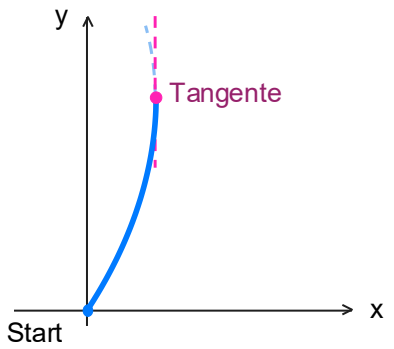
a) Wo trifft das rechte Blatt den Ursprung?
Integriere von $-\pi/4$ bis $\pi/4$ und nutze die Symmetrie.



b) Suche den höchsten Punkt dieses Blattes.
Dort gilt $y'(\varphi) = 0$. Wie kommst du von seiner Höhe auf b?

Tipps zur Serie 11 · Aufgaben 3 bis 5

3 Bogenlänge bis zur ersten vertikalen Tangente



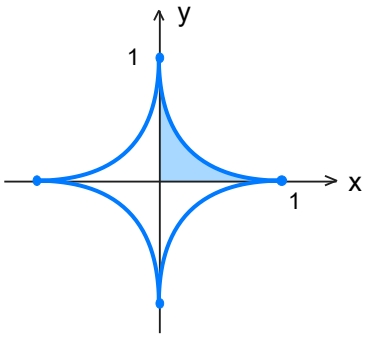
Geg.: $x(t)$ und $y(t)$ als Integrale von 1 bis t.

Ges.: Die Länge des Weges ab dem Ursprung.

Start bei $t = 1$. Leite beide Integrale nach ihrer oberen Grenze ab.
Für das Ende suche das erste $t > 1$ mit $x'(t) = 0$ und $y'(t) \neq 0$.

Unter der Wurzel hilft $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

4 Vier gleiche Teilflächen

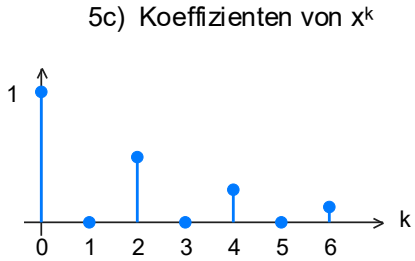


Geg.: $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$.

Ges.: Die gesamte eingeschlossene Fläche.

Im ersten Quadranten kannst du die Beträge weglassen.
Löse nach y auf und integriere von 0 bis 1. Wie viele gleiche Teile siehst du?

5 Drei Potenzreihen



Geg.: Die Reihen in 5a bis 5c mit Zentrum 0.

Ges.: Jeweils der Konvergenzradius R.

a) Ziehe die n-te Wurzel aus $|(x/n)^n|$. Für welche x liegt ihr Grenzwert unter 1?

b) Bilde $|a_n/a_{n+1}|$. Welche Potenzen von n dominieren?

c) Schreibe $x^{2n}/2^n$ als eine einzige Potenz.
Was ist der Quotient der geometrischen Reihe?