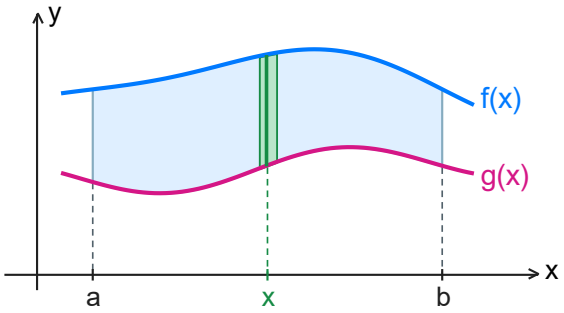
# Analysis 1 - Übung 11

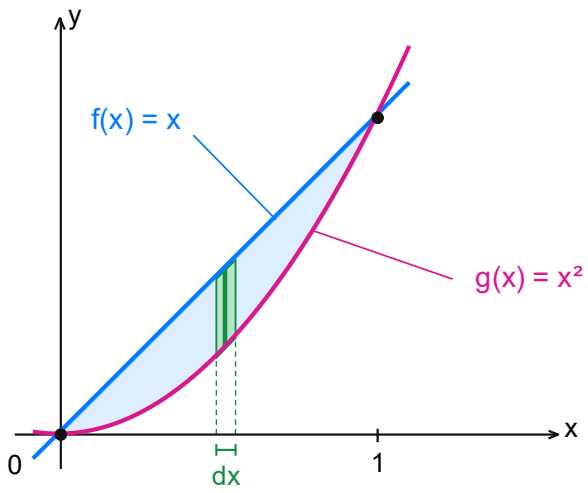
## Flächen zwischen zwei Kurven

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx \qquad (f \geq g)$$




Bsp.
Geg.: $f(x) = x,\ g(x) = x^2$

Ges.: Die Fläche zwischen den beiden Schnittpunkten




Wo schneiden sich die Kurven?
Welche liegt dazwischen oben?

$$x = x^2 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 1$$

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Wechseln die Kurven ihre Reihenfolge, teile das Integral am Schnittpunkt auf

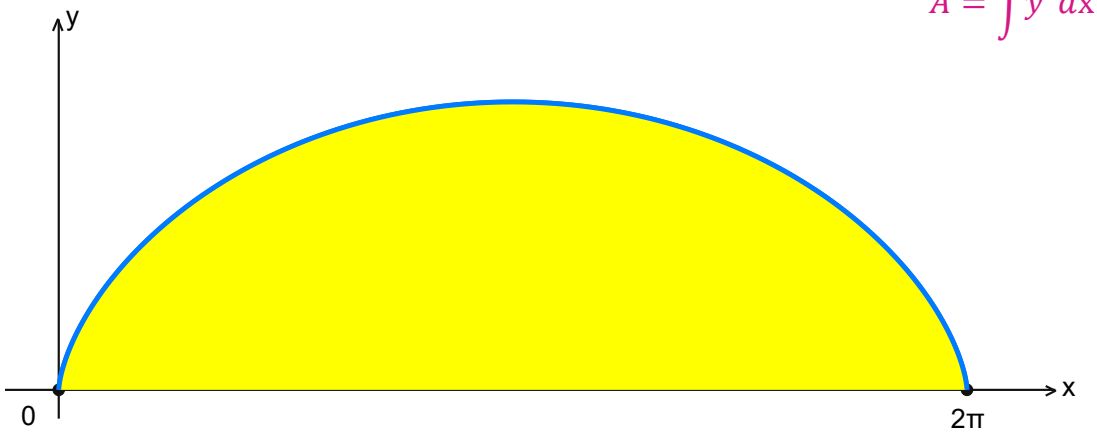
## Flächenberechnung in Parameterform (Fläche unter der Kurve)

Parametrisierungen $\bar{r} = (x(t), y(t))^T$

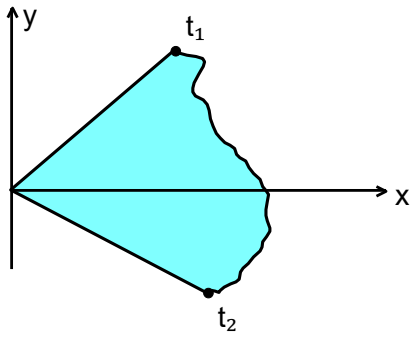
$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\ dt$$

$$A = \int y \frac{dx}{dt}\, dt$$

$$A = \int y\ dx$$



## Sektorfläche(vom Ortsvektor überstrichene Fläche)

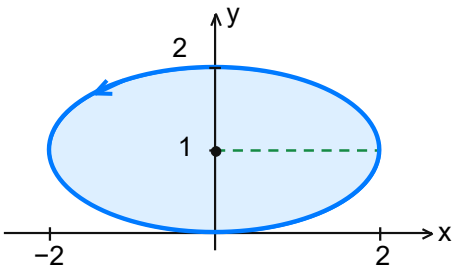



$$A = \frac{1}{2}\left|\int_{t_1}^{t_2} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\ dt\right|$$

Bsp.:

Geg.: $x = 2\cos t$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$y = 1 + \sin t$




Ges.: Die Fläche der Ellipse

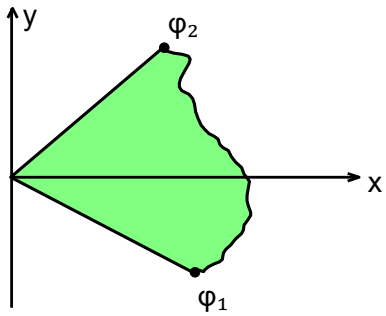
$x' = -2\sin t$

$y' = \cos t$

$$xy' - yx' = 2\cos^2 t + 2(1 + \sin t)\sin t = 2\cos^2 t + 2sin^2 t + 2\sin t = 2 + 2\sin t$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2 + 2\sin t)\, dt = [t - \cos t]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 - \cos 2\pi + \cos 0 = 2\pi$$

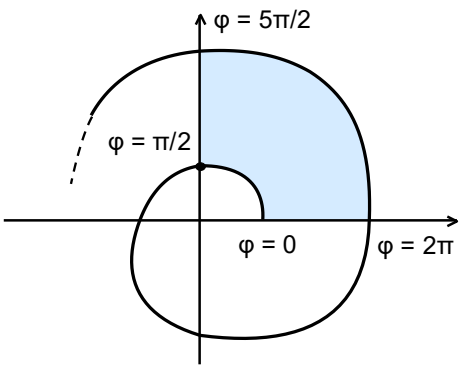
## Sektorfläche in Polarkoordinaten




$$A = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)^2\, d\varphi$$

Bsp.: Geg.: Die Spirale $r(\varphi) = e^{\varphi}$.

Ges.: Die Fläche zwischen den beiden eingezeichneten Windungen im ersten Quadranten




$$A = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{5\pi/2} e^{2\varphi}\, d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^{2\varphi}\, d\varphi$$

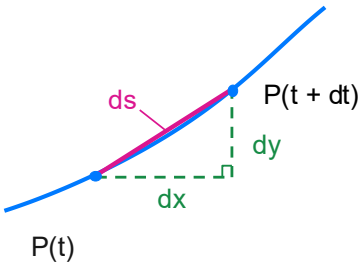
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2\varphi}\right]_{2\pi}^{5\pi/2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2\varphi}\right]_0^{\pi/2}$$

$$A = \frac{1}{4}(e^{5\pi} - e^{4\pi} - e^{\pi} + 1)$$

Bogenlänge einer ebenen Kurve

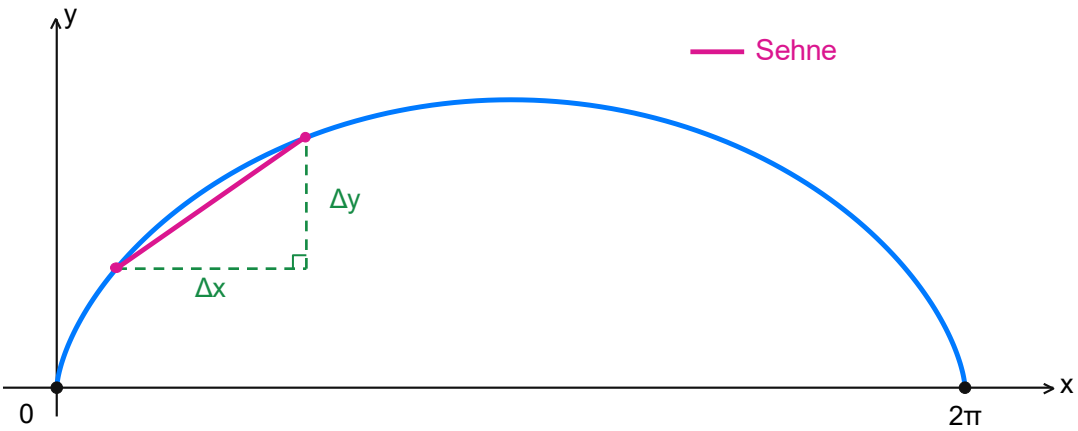
Stell dir einen Faden entlang der Kurve vor.
Beim Abrollen addieren sich viele kurze Wegstücke.
Für jedes Stück hilft Pythagoras.

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt$$




Geg.: Ein Bogen der Zykloide aus Übung 9: $x(t) = t - \sin t$
$y(t) = 1 - \cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$

Ges.: Wie lang ist der Weg von einer Spitze zur nächsten?




$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$

$x'(t) = 1 - \cos t$
$y'(t) = \sin t$

$$(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2 - 2\cos t = 4\sin^2(t/2)$$

Auf diesem Bogen liegt $t/2$ zwischen $0$ und $\pi$. Deshalb ist $\sin(t/2) \ge 0$

$u = t/2$ Untere: $u = 0/2 = 0$ & Obere: $u = 2\pi/2 = \pi$

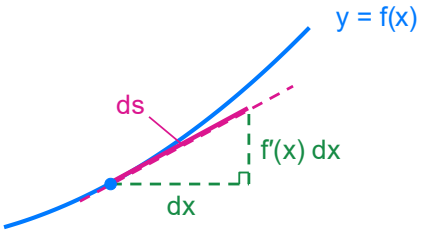
$du/dt = 1/2$ $2du = dt$

$$L = \int_0^{2\pi} 2\sin(t/2)\,dt = \int_0^{\pi} 2\sin(u)2\,du = [-4\cos(u)]_0^{\pi} = (-4\cos(\pi) + 4\cos(0)) = 8$$

## Bogenlänge als Graph oder Polarkurve

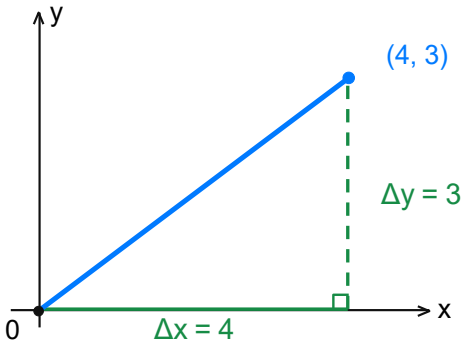
### Ein Graph

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$




Bsp.: Geg.: $y = \frac{3}{4}x$ für $0 \le x \le 4$

Ges.: Die Länge der Strecke
Wie kannst du das Ergebnis mit einer Skizze prüfen?

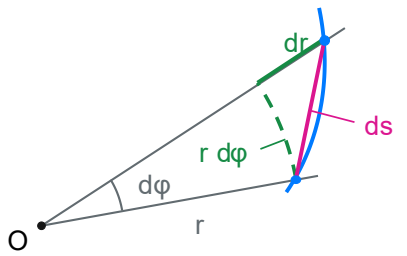



$$f'(x) = \frac{3}{4}, \qquad \sqrt{1 + (\frac{3}{4})^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

$$L = \int_0^4 \frac{5}{4}\, dx = \left[\frac{5}{4}x\right]_0^4 = \frac{5}{4} \bullet 4 = 5$$

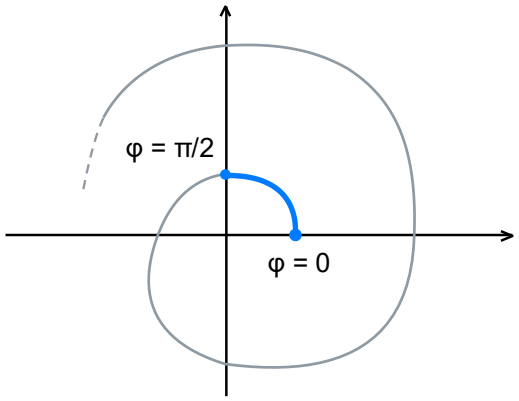
### Eine Polarkurve

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi$$




Geg.: Wieder die Spirale $r(\varphi) = e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi/2$

Ges.: Die Länge des Spiralbogens



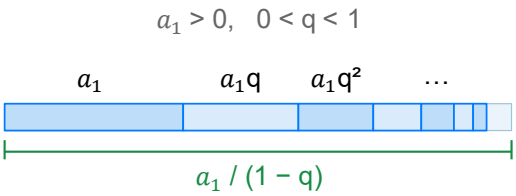

$$r' = e^{\varphi}, \qquad \sqrt{r^2 + (r')^2} = \sqrt{e^{2\varphi} + e^{2\varphi}} = \sqrt{2}\, e^{\varphi}$$

$$L = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} e^{\varphi}\, d\varphi = \sqrt{2}[e^{\varphi}]_0^{\pi/2} = \sqrt{2}\,(e^{\pi/2} - 1)$$

# Geometrische Reihen

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_0\, q^k = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_0\, q^n = \frac{a_0}{1-q} \qquad (|q| < 1)$$

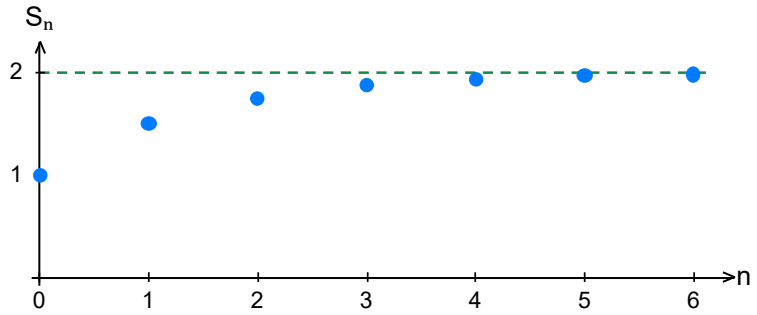



Geg.: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ $\qquad a_0 = 1, \qquad q = \frac{1}{2}$

Ges.: Die ersten vier Partialsummen und ihr Grenzwert

$$S_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \qquad S_3 = \frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{14}{8} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

$$S_0 = 1, \quad S_1 = \frac{3}{2}, \quad S_2 = \frac{7}{4}, \quad S_3 = \frac{15}{8}$$




$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

Folge $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$

Folgenglied $a_2 = \frac{1}{4}$

Endliche Summe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

Partialsumme $S_2 = \frac{7}{4}$

Partialsummenfolge $\left(1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \ldots\right)$

Unendliche Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$

Reihenwert(Summe der Reihe) 2

Potenzreihen und Konvergenzradius

Eine Potenzreihe ist eine ganz allgemeine unendliche Reihe ~ «unendliche Polynom»
«Potenzreihe der Funktion f(x) um den Punkt $x_0$»

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad x_0\text{: Zentrum}$$

Spezielle Typen von Potenzreihen:
- Taylorreihen (Übung 12)
- Maclaurinreihen
- Geometrische Reihe
- Exponentialreihe
- Binomialreihe
- Trigonometrische Potenzreihen(sin,cos)
- Logarithmusreihe

Bsp

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots \rightarrow konvergiert\ für\ |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x^2)^n = 1 - 2x^2 + 4x^4 \ldots \rightarrow konvergiert\ für\ |-2x^2| < 1\ oder\ |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{5-x} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{x}{5}} = \frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{x}{5}} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n \rightarrow konvergiert\ für\ \left|\frac{x}{5}\right| < 1\ oder\ |x| < 5$$

$$\frac{x^2}{5-x} = \frac{1}{5}x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} x^{n+2} \rightarrow i = n+2 \rightarrow \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{i-1} x^i$$

Tabelle: S.79

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^x + \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^n}{n!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] = \cdots$$

$$e^x \bullet \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \bullet \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \neq \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{x^n}{n!} \bullet (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$

Bsp. Bestimme die ersten vier Koeffizienten der Potenzreihe von $\frac{\sin(x)}{e^x}$

um des Zentrum $x_0 = 0$

$$\frac{\sin(x)}{e^x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\sin(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) e^x$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) \bullet (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!})$$

$x^0: 0 = a_0 \rightarrow \boxed{a_0 = 0}$

$x^1: 1 = a_0 + a_1 \rightarrow \boxed{a_1 = 1}$

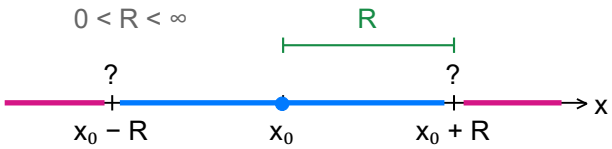
$x^2: 0 = a_0 \bullet \frac{1}{2!} + a_1 + a_2 \rightarrow \boxed{a_2 = -1}$

$x^3: -\frac{1}{3!} = a_0 \bullet \frac{1}{3!} + a_1 \bullet \frac{1}{2!} + a_2 + a_3 \rightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{3}}$

## Konvergenzradius

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad x_0\text{: Zentrum}$$




Randpunkte einzeln prüfen

Divergenzbereich

Innerhalb des Konvergenzbereichs darf man die Potenzreihe gliederweise addieren/subtrahieren und integrieren/differenzieren

Für $|x - x_0| < R$ konvergiert die Reihe absolut
Für $|x - x_0| > R$ divergiert sie

Bsp.:
Geg.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

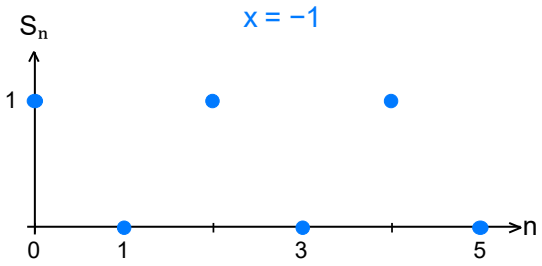
Ges.: Zentrum, Radius und alle x, für die die Reihe konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{2^n} \bullet 2^{n+1}\right| = 2$$

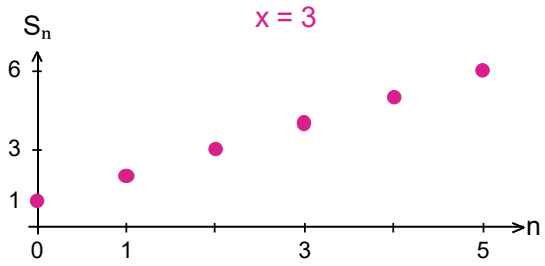
$$x_0 - R < \mathrm{x} < \mathrm{x}_0 + \mathrm{R} \Rightarrow -1 < x < 3$$

$x = -1$: $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

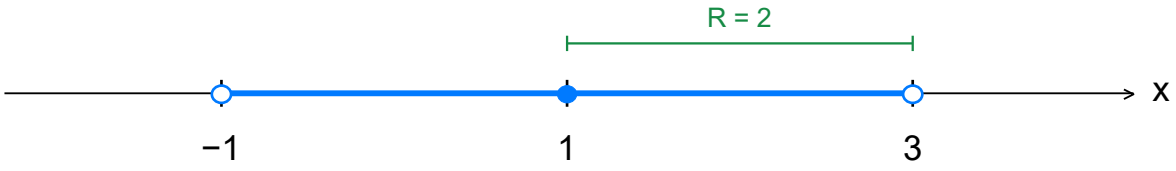



Partialsummen springen zwischen 1 und 0

$x = 3$: $1 + 1 + 1 + \cdots$




Partialsummen wachsen über jede Grenze

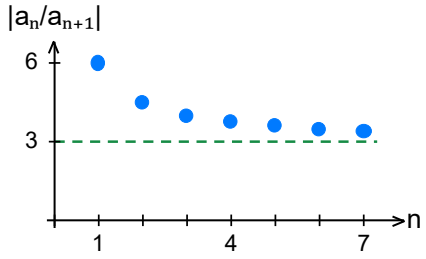



$$x_0 = 1, \qquad R = 2, \qquad -1 < x < 3$$

Bsp.:

Geg.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \bullet 3^n}$$




Ges.: Konvergenzradius und Konvergenzbereich.

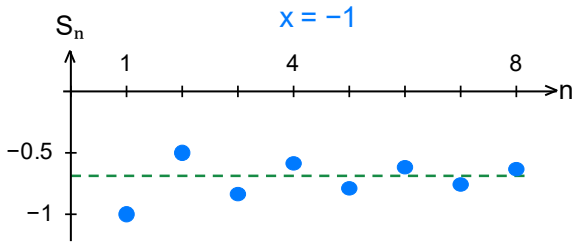
$$a_n = \frac{1}{n \bullet 3^n}, \qquad \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{n \bullet 3^n} \bullet (n+1) \bullet 3^{n+1} = 3 \bullet \frac{n+1}{n} \longrightarrow 3 = \mathrm{R}$$

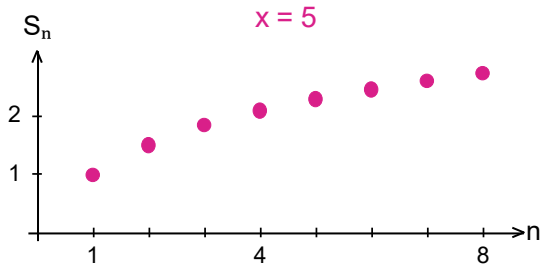
$$|x-2| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 5$$

Was passiert bei x = −1 und x = 5?

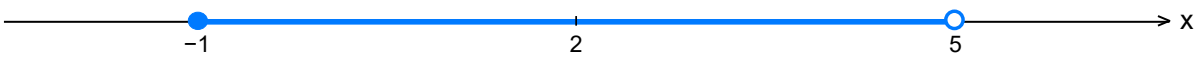
Links entsteht $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$

Rechts entsteht die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ = divergiert




$$R = 3, \qquad x \in [-1,5)$$






Tipps zur Serie 11 · Aufgaben 1 und 2

## 1 Flächen in Polarkoordinaten

Geg.: $r = \sqrt{\varphi}$, $r = 1/(1+\varphi)$, $r = |\sin\varphi|$ und $r = 2a(1+\cos\varphi)$, jeweils für $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Ges.: Die Fläche für jede der vier Kurven.

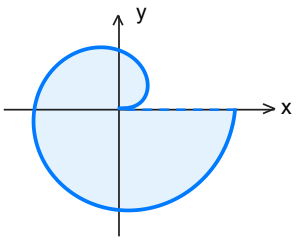
$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\varphi)^2 \, d\varphi$$

a) Quadriere die Wurzel. Was bleibt als Integrand übrig?

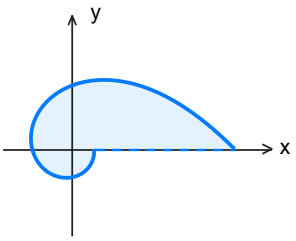
b) Schreibe den quadrierten Bruch als $(1+\varphi)^{-2}$.

c) Nach dem Quadrieren gilt $|\sin\varphi|^2 = \sin^2\varphi$.

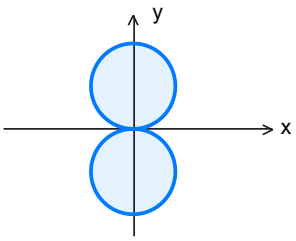
d) Multipliziere $(1+\cos\varphi)^2$ aus. Nutze die Halbwinkelformel.



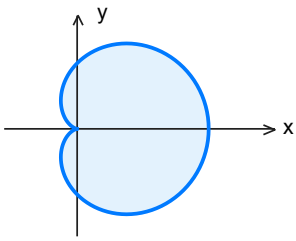
a) r = √φ



b) r = 1/(1 + φ)



c) r = |sin φ|



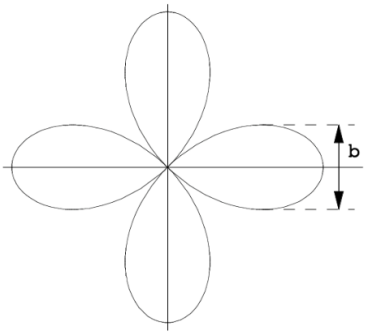
d) r = 2a(1 + cos φ)

## 2 Das Kleeblatt

Geg.: $r(\varphi) = a|\cos(2\varphi)|$, $a > 0$.

Ges.: Die Gesamtfläche und die Breite $b$ des rechten Blattes.

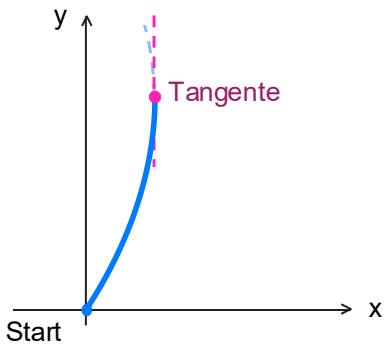
a) Wo trifft das rechte Blatt den Ursprung?
Integriere von $-\pi/4$ bis $\pi/4$ und nutze die Symmetrie.




b) Suche den höchsten Punkt dieses Blattes.
Dort gilt $y'(\varphi) = 0$. Wie kommst du von seiner Höhe auf $b$?

Tipps zur Serie 11 · Aufgaben 3 bis 5

## 3 Bogenlänge bis zur ersten vertikalen Tangente



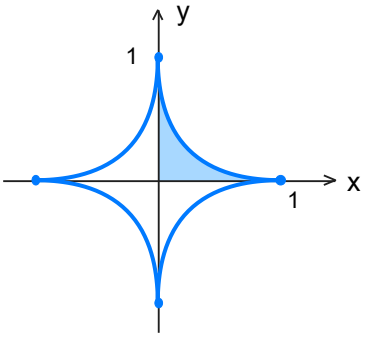

Geg.: $x(t)$ und $y(t)$ als Integrale von 1 bis $t$.

Ges.: Die Länge des Weges ab dem Ursprung.

Start bei $t = 1$. Leite beide Integrale nach ihrer oberen Grenze ab.
Für das Ende suche das erste $t > 1$ mit $x'(t) = 0$ und $y'(t) \neq 0$.

Unter der Wurzel hilft $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

## 4 Vier gleiche Teilflächen



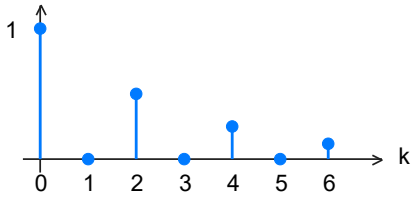

Geg.: $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$.

Ges.: Die gesamte eingeschlossene Fläche.

Im ersten Quadranten kannst du die Beträge weglassen.
Löse nach $y$ auf und integriere von $0$ bis $1$. Wie viele gleiche Teile siehst du?

## 5 Drei Potenzreihen

5c) Koeffizienten von $x^k$




Geg.: Die Reihen in 5a bis 5c mit Zentrum 0.

Ges.: Jeweils der Konvergenzradius $R$.

a) Ziehe die $n$-te Wurzel aus $|(x/n)^n|$. Für welche $x$ liegt ihr Grenzwert unter 1?

b) Bilde $|a_n/a_{n+1}|$. Welche Potenzen von $n$ dominieren?

c) Schreibe $x^{2n}/2^n$ als eine einzige Potenz.
Was ist der Quotient der geometrischen Reihe?