Analysis 1 - Übung 10

Partielle Integration

$$\int u\,v'\,dx = u\,v - \int u'v\,dx$$

$$\int_a^b u\;v'\,dx = [u\,v]_a^b - \int_a^b u'\,v\,dx$$

Bsp.:

$I = \int xe^x\,dx$ = =

= =

$I =$ $- \int$ $dx =$

$I =$

$H = \int x\ln(x^2)dx$ = =

= =

$H =$ $- \int$ $dx =$ $-$ $H =$

Bsp. Mit Grenzen

$J = \int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$ = =

= =

$J = [$ $] - \int$ dx

$J = [$ $]_0^{\pi/2} = \left($ $\cdot$ $\right) - ($ $\cdot$ $)$

$J =$

SC 19 (III) Das Integral $\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x$ ist gleich

(A) $x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x$

(B) $x\frac{e^{2x}}{2} - \int e^{2x}\,\mathrm{d}x$

(C) $xe^{2x} - \int e^{2x}\,\mathrm{d}x$

(D) $xe^{2x} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x$

Substitution

$$\int f(g(x))\ldots\,dx = \int f(u)\,du$$

•
•
•
• &

Bsp.:

$I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$ = = =

$I = \int$ $= \int$ $du =$

$I =$

Bestimmtes Integral: neue Grenzen

$$\int_a^b f(g(x))\ldots\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Bsp.:

$J = \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$ = $x = 0 \mapsto u =$

$x = 1 \mapsto u =$

= =

$J = \int$ $= \int$ $= [$ = =

Potenzen von Sinus und Cosinus

Für $a, b \in \mathbb{Z}$ & $n \geq 2$:

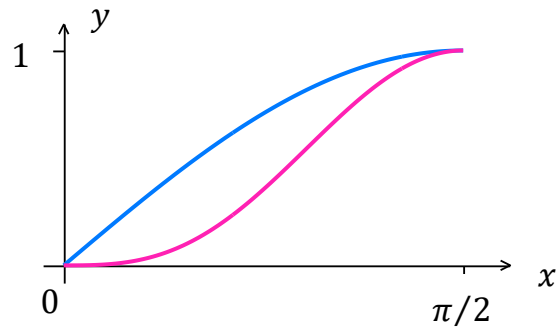
$$\int_{a\cdot\frac{\pi}{2}}^{b\cdot\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int_{a\cdot\frac{\pi}{2}}^{b\cdot\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\,dx$$

Mit

$$\int_{a\cdot\frac{\pi}{2}}^{b\cdot\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int_{a\cdot\frac{\pi}{2}}^{b\cdot\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)\,dx$$

Bsp.:

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$$



$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\,dx = \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad dx = \quad [\qquad\qquad]_0^{\pi/2} = \left(\qquad\qquad + \qquad\qquad\right) =$$

$$I =$$

Für $A, B \in \mathbb{Z}$ & $n \geq 2$:

$$\int_A^B \sin^n(x)\,dx = \left[-\frac{\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n}\right]_A^B + \frac{n-1}{n}\int_A^B \sin^{n-2}(x)\,dx$$

$$\int_A^B \cos^n(x)\,dx = \left[\frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n}\right]_A^B + \frac{n-1}{n}\int_A^B \cos^{n-2}(x)\,dx$$

Bsp.: $J = \int \sin^2 x\,dx$

$$J = \int \sin^2(x)\,dx = \left[-\frac{\sin\qquad(x)\cos(x)}{2}\right] \quad + \qquad \int \sin\qquad(x)\,dx$$

$$= \left[-\text{————————}\right] \quad + \quad [\qquad\qquad] \quad = \qquad\qquad\qquad +$$

$$J =$$

Partialbruchzerlegung

Aus einem Bruch machen wir $p(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5x^2 + x}{x^3 + 2}$
(Diese können wir danach)

1. Falls Grad($f(x)$) Grad($g(x)$) führe
   Else:
2. faktorisieren und den passenden aufstellen
3. Mit dem multiplizieren und … bestimmen

Anzätze:

i) n-fache Nullstelle: $\frac{(\dots)}{(x-a)^n} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{\mathrm{B}}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{\mathrm{Z}}{(x-a)^n}$

ii) komplexe Nullstelle: $\frac{(\dots)}{(x^2-a)} = \frac{Ax+B}{(x^2-a)}$

iii) n-fache komplexe Nullstelle: $\frac{(\dots)}{(x^2-a)^n} = \frac{Ax+B}{(x^2-a)} + \frac{Cx+D}{(x^2-a)^2} + \cdots + \frac{Ex+F}{(x^2-a)^n}$

Bsp.: $\frac{2x+3}{(x-1)(x^2+1)} =$ +

= +

= + +

= + +

= ( ) + ( ) -

: = ⇒ =
: =
: = = =

$A =$, $B =$, $D =$ $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+D}{x^2+1}$

$\frac{2x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{}{(x-1)}$ $\frac{x}{(x^2+1)}$

Bsp.:

$$I = \int \frac{x^2+1}{x+1}\,dx$$

( ):( ) =

−( )

−( )

$$\frac{x^2+1}{x+1} =$$

$$I = \int \qquad dx =$$

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C \qquad (x \neq a)$$

$$I =$$

Bsp.:

$$J = \int \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} =$$

=

= +
= +
=

: = ⇒ =
: =) ⇒ = = ⇒ $A =$ $B =$

$$J = \int \qquad dx$$

$$J =$$

Bsp.:

$$I = \int \frac{x+5}{(x+1)(x+2)^2}\,dx$$

$$\frac{x+5}{(x+1)(x+2)^2} = \quad +$$

$$= \quad + \quad +$$

$$= \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$$

$$= \quad + \quad +$$

$$= \quad + \quad +$$

$$: \quad = \quad \Rightarrow \quad =$$

$$: \quad = \quad \Rightarrow \quad = \quad = \quad =$$

$$: \quad = \quad \Rightarrow \quad = \quad = \quad =$$

$$\text{A} = \quad \text{D} = \quad = \quad = \quad \text{B} = \quad =$$

$$A = \quad B = \quad D =$$

$$I = \int \cdot \quad dx = \int \cdot \quad dx$$

$$= \int \quad dx - \int \quad dx - \int \quad dx$$

$$t = \quad \Rightarrow \quad =$$

$$= \quad - \int \quad dt$$

$$= \quad - \left[\quad \right]$$

$$= \quad +$$

$$I = \quad +$$

SC 10 (A) Der korrekte Ansatz für die Partialbruchzerlegung unter Verwendung der Konstanten $A_i \neq 0$ ist $\dfrac{3x+1}{x^3+5x^2+8x+4} = \dfrac{A_1}{x+1} + \dots$

(A) $\dfrac{A_2x + A_3}{(x+2)^2}$

(B) $\dfrac{A_2x^2 + A_3x + A_4}{(x+2)^2}$

(C) $\dfrac{A_2}{x+2}$

(D) $\dfrac{A_2}{(x+2)^2}$

SC 14 (III) Was ist die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion $\dfrac{3x+1}{x^2(x+1)-(x+1)}$?

(A) $-\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x+1}$

(B) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x-1}$

(C) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x+1}$

(D) $-\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x-1}$

Quadratischer Faktor ohne reelle Nullstellen

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad (a > 0)$$

Noch Integrale

$$\int g'(x) f(g(x))\,dx = F\big(g(x)\big) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

Bsp.:

$\int 2x\cos(x^2)\,dx =$

$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}\,dx =$

$\int \frac{2x+3}{x^2+1}\,dx =$ $+$ $=$ $+$

Bsp.:

$$J = \int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx$$

$2x + 3 =$ $=$

$x^2 + 2x + 2 =$

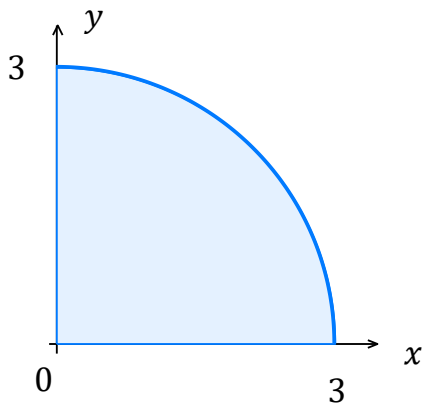
$$J = \int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx = \int \quad + \quad dx$$

$J =$

Zusatzaufgaben: Substitution und Rekursion

Geg.:

$$I = \int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx$$



Ges.: Integralwert. Verwende x = 3 sin(u)

$$x = 3\sin(u), \qquad = \qquad , \qquad \leq u = \qquad \leq$$

$$I = \int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx = \int$$

$$I = \int \sqrt{\qquad\qquad} \qquad du = \int \qquad du$$

$$I = \int \qquad du = \frac{\qquad}{\qquad} \int \qquad du = \int \qquad =$$

$$I =$$

SC 13 (III) In welches Integral geht das Integral $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ durch die Substitution $u = \cos x$ über?

(A) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{1}{u^2 - 1}\,\mathrm{d}u$

(B) $\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\,\mathrm{d}u$

(C) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\,\mathrm{d}u$

(D) $\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{u^2 - 1}\,\mathrm{d}u$

Spezielle Funktionen ohne elementare Stammfunktion:

$$\int e^{\pm x^2}\,dx \qquad \int \sin(x^2)\,dx$$

$$\int \frac{1}{\ln(x)}\,dx \qquad \int \cos(x^2)\,dx$$

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \int \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \qquad \int \frac{\cos(x)}{x}\,dx$$



Tipps zur Serie 10: Aufgabe 1

a) $u = x^2$ .Welche Standardform entsteht im Nenner?

b) $\cosh x$ mit Exponentialfunktionen schreiben, dann $u = e^x$.

c) Erst $u = x^2$ mit neuen Grenzen, danach partiell integrieren.

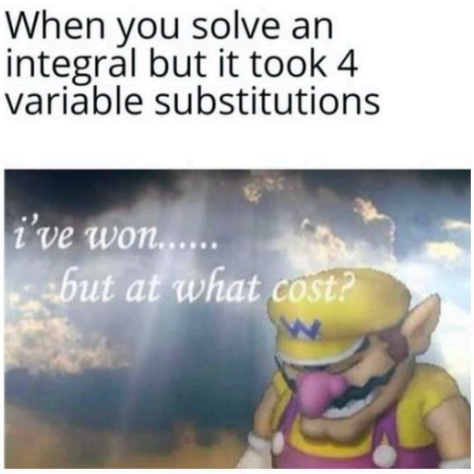
d) $u = \sqrt{e^x - 1} > 0$ .Bestimme auch dx.

e) $2x = \cos u$. Neue Grenzen und Wertebereich von arcsin prüfen.

f) Nenner gruppieren. Doppelte Nullstelle im Ansatz beachten.

g) $x^2 + 1$ ist ein Faktor. Über quadratische Faktoren kommt $Ax + B$.

h) x^2 ausklammern. Ansatz: $A/x + B/x^2 + (Dx + E)/(x^2 + 2)$.



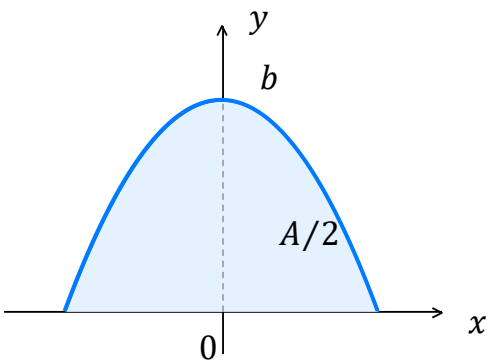
Tipps zur Serie 10: Aufgaben 2 und 3

2. Eine ganze Familie von Parabeln

Geg.: $y = -ax^2 + b$, $a, b > 0$. Fläche mit der x-Achse: $4/3$.

Ges.: Alle passenden Parameterpaare a und b.

Zuerst Nullstellen bestimmen.
Dann die Symmetrie zur y-Achse nutzen.
Die Fläche als Integral aufschreiben
und gleich 4/3 setzen.



Gesucht ist eine Familie, keine einzelne Parabel.

3. Eine Folge von Integralen

Geg.: $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$, $n \geq 0$.

Ges.: a) I_0, I_1. b) Rekursion. c) I_5. d) Grenzwert (Zusatz).

a) I_0 direkt berechnen. Für I_1: $\ln x = \ln x \cdot 1$.

b) Partiell mit $u = (\ln x)^n$ und $v' = 1$. Welches I_k bleibt übrig?

c) Mit den Startwerten Schritt für Schritt bis I_5 rechnen.

d) Bei $e - \varepsilon$ aufteilen. Links ist $\ln x \leq q < 1$. Rechts ist das Intervall nur ε breit.