Analysis 1 - Übung 10

Partielle Integration

$$\int u\,v'\,dx = u\,v - \int u'\,v\,dx$$

$$\int_a^b u\,v'\,dx = [u\,v]_a^b - \int_a^b u'\,v\,dx$$

Bsp.:

$$I = \int x e^x\,dx$$

$$u = x \qquad u' = 1$$

$$v' = e^x \qquad v = e^x$$

$$I = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

$$\underline{\underline{I = (x-1)e^x + C}}$$

$$H = \int x\ln(x^2)\,dx \qquad u = \ln(x^2) \quad u' = \frac{2x}{x^2}$$

$$v' = x \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$H = \frac{x^2}{2}\ln(x^2) - \int \frac{x^2}{2}\frac{2x}{x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x^2) - \frac{x^2}{2} + C \qquad \underline{\underline{H = \frac{1}{2}x^2\ln(x^2) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$$

Bsp. Mit Grenzen

$$J = \int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx \qquad \begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{matrix}$$

$$J = [-x\cos x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos x\,dx$$

$$J = [-x\cos x + \sin x]_0^{\pi/2} = \left(-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - (-0\cos(0) + \sin(0))$$

$$\underline{\underline{J = 1}}$$

SC 19 (III) Das Integral $\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x$ ist gleich

(A) $x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x$

(B) $x\frac{e^{2x}}{2} - \int e^{2x}\,\mathrm{d}x$

(C) $xe^{2x} - \int e^{2x}\,\mathrm{d}x$

(D) $xe^{2x} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x$

Substitution

$$\int f(g(x))\ldots dx = \int f(u)\,du$$

- Braucht Gefühl/Übung
- Tabellen
- «Das was kompliziert ist substituieren»
- dx & Grenzen anpassen!

Bsp.:

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\,dx \qquad u = x^2+2 \qquad du = 2x\,dx \qquad dx = \frac{du}{2x}$$

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du = \sqrt{u} + C$$ Rücksubstitution

$$\underline{\underline{I = \sqrt{x^2+2} + C}}$$

Bestimmtes Integral: neue Grenzen

$$\int_a^b f(g(x))\ldots dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Bsp.:

$$J = \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$u = 1 + x^2$: $\quad x = 0 \mapsto u = 1$

$x = 1 \mapsto u = 2$

$$du = 2x\,dx \qquad dx = \frac{du}{2x}$$

$$\underline{\underline{J = \int_1^2 \frac{2x}{u}\frac{du}{2x} = \int_1^2 \frac{du}{u} = [\ln u]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2}}$$

Potenzen von Sinus und Cosinus

Für $a, b \in \mathbb{Z}$ & $n \geq 2$:

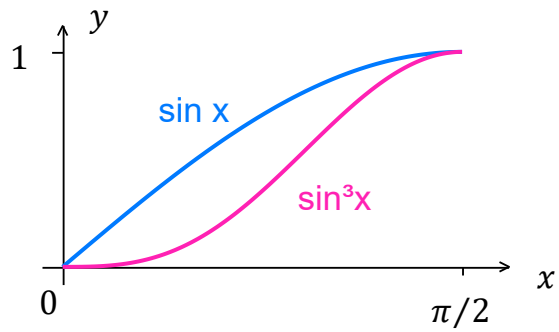
Mit π

$$\int_{a\cdot\frac{\pi}{2}}^{b\cdot\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int_{a\cdot\frac{\pi}{2}}^{b\cdot\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\,dx$$

$$\int_{a\cdot\frac{\pi}{2}}^{b\cdot\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int_{a\cdot\frac{\pi}{2}}^{b\cdot\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)\,dx$$

Bsp.:

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$$



$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\,dx = \frac{3-1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1(x)\,dx = \frac{2}{3}[-\cos(x)]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(0)\right) = \frac{2}{3}$$

$$\underline{\underline{I = \frac{2}{3}}}$$

Für $A, B \in \mathbb{Z}$ & $n \geq 2$:

$$\int_A^B \sin^n(x)\,dx = \left[-\frac{sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n}\right]_A^B + \frac{n-1}{n}\int_A^B \sin^{n-2}(x)\,dx$$

$$\int_A^B \cos^n(x)\,dx = \left[\frac{cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n}\right]_A^B + \frac{n-1}{n}\int_A^B \cos^{n-2}(x)\,dx$$

Bsp.: $J = \int \sin^2 x\,dx$

$$J = \int \sin^2(x)\,dx = \left[-\frac{sin^{2-1}(x)\cos(x)}{2}\right] + \frac{2-1}{2}\int \sin^{2-2}(x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{2sin(x)\cos(x)}{4}\right] + \frac{1}{2}[x+C] = -\sin(2x)\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + C$$

$$\underline{\underline{J = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C}}$$

Partialbruchzerlegung

Aus einem komplizierten Bruch machen wir mehrere einfache (Diese können wir danach einzeln integrieren)

$$p(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5x^2 + x}{x^3 + 2}$$

1. Falls Grad($f(x)$) < Grad($g(x)$) führe Partialbruchzerlegung
   Else: Polynomdivision
2. Nenner g(x) faktorisieren und den passenden Ansatz aufstellen
3. Mit dem ganzen Nenner multiplizieren und A, B, … bestimmen
(4. Jeden Bruch einzeln integrieren)

Anzätze:

i) n-fache Nullstelle: $$\frac{(\dots)}{(x-a)^n} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{\mathrm{B}}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{\mathrm{Z}}{(x-a)^n}$$

ii) komplexe Nullstelle: $$\frac{(\dots)}{(x^2-a)} = \frac{Ax+B}{(x^2-a)}$$

iii) n-fache komplexe Nullstelle: $$\frac{(\dots)}{(x^2-a)^n} = \frac{Ax+B}{(x^2-a)} + \frac{Cx+D}{(x^2-a)^2} + \cdots + \frac{Ex+F}{(x^2-a)^n}$$

Bsp.: $$\frac{2x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+D}{x^2+1}$$

$$2x + 3 = A(x^2 + 1) + (Bx + D)(x - 1)$$

$$2x + 3 = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Dx - D$$

$$2x + 3 = Ax^2 + Bx^2 + Dx - Bx - D + A$$

$$2x + 3 = (A + B)x^2 + (D - B)x - D + A$$

x^2: $A + B = 0 \Rightarrow \mathrm{A} = -\mathrm{B}$
x: $D - B = 2$
x^0: $A - D = 3 = -\mathrm{B} - \mathrm{D} = 3$

$$A = \frac{5}{2}, B = -\frac{5}{2}, D = -\frac{1}{2} \qquad \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+D}{x^2+1}$$

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{5}{2(x-1)} - \frac{5x+1}{2(x^2+1)}$$

Bsp.:

$$I = \int \frac{x^2+1}{x+1}\,dx$$

$$(x^2+1):(x+1) = x - 1 + \frac{2}{x+1}$$
$$-\underline{(x^2+x)}$$
$$-x+1$$
$$-\underline{(-x-1)}$$
$$2$$

$$\frac{x^2+1}{x+1} = x - 1 + \frac{2}{x+1}$$

$$\mathrm{I} = \int x - 1 + \frac{2}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} + 2\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C \qquad (x \neq a)$$

$$\underline{\underline{I = \frac{1}{2}x^2 - x + 2\ln|x+1| + C}}$$

Bsp.:

$$J = \int \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$1 = A(x+2) + B(x+1)$$

$$1 = Ax + 2\mathrm{A} + Bx + \mathrm{B}$$
$$1 = Ax + Bx + 2\mathrm{A} + \mathrm{B}$$
$$1 = (A+B)x + 2\mathrm{A} + \mathrm{B}$$

$$x^1\colon\ 0 = A + B \Longrightarrow \mathrm{B} = -A$$
$$x^0\colon 1 = 2\mathrm{A}+\mathrm{B} \Longrightarrow 1 = 2A - A = A \Longrightarrow \underline{A = 1, B = -1}$$

$$J = \int \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x+2)}\,dx$$

$$\underline{\underline{J = \ln|x+1| - \ln|x+2| + C}}$$

Bsp.:

$$I = \int \frac{x+5}{(x+1)(x+2)^2}\,dx$$

$$\frac{x+5}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

$$x + 5 = A(x+2)^2 + B(x+1)(x+2) + D(x+1)$$

$$x + 5 = Ax^2 + 4Ax + 4A + Bx^2 + Bx + 2Bx + 2B + Dx + D$$

$$x + 5 = Ax^2 + Bx^2 + 4Ax + Bx + 2Bx + Dx + 4A + 2B + D$$

$$x + 5 = (A+B)x^2 + (4A + 3B + D)x + 4A + 2B + D$$

$$x^2: 0 = (A+B) \Longrightarrow A = -B$$

$$x^1: 1 = (4A + 3B + D) \Longrightarrow 1 = (4A - 3A + D) = A + D = 1$$

$$x^0: 5 = (4A + 2B + D) \Longrightarrow 5 = (4A - 2A + D) = 2A + D = 5$$

$$A = 4 \qquad D = 1 - A = 1 - 4 = -3 \qquad B = -A = -4$$

$$A = 4, \qquad B = -4, \qquad D = -3$$

$$I = \int \frac{4}{x+1} - \frac{4}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}\,dx = \int \frac{4}{x+1} - \frac{4}{x+2} - 3(x+2)^{-2}\,dx$$

$$= \int \frac{4}{x+1}\,dx - \int \frac{4}{x+2}\,dx - 3\int (x+2)^{-2}\,dx$$

$$t = x + 2 \Rightarrow dt = dx$$

$$= 4\ln(x+1) - 4\ln(x+2) - 3\int t^{-2}dt$$

$$= 4\ln(x+1) - 4\ln(x+2) - 3\left[\frac{1}{-2+1}t^{-2+1}\right]$$

$$= 4\ln(x+1) - 4\ln(x+2) + 3[t^{-1}]$$

$$\underline{\underline{I = 4\ln|x+1| - 4\ln|x+2| + \frac{3}{x+2} + C}}$$

SC 10 (A) Der korrekte Ansatz für die Partialbruchzerlegung unter Verwendung der Konstanten $A_i \neq 0$ ist $\dfrac{3x+1}{x^3+5x^2+8x+4} = \dfrac{A_1}{x+1} + \dots$

(A) $\dfrac{A_2x + A_3}{(x+2)^2}$

(B) $\dfrac{A_2x^2 + A_3x + A_4}{(x+2)^2}$

(C) $\dfrac{A_2}{x+2}$

(D) $\dfrac{A_2}{(x+2)^2}$

SC 14 (III) Was ist die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion $\dfrac{3x+1}{x^2(x+1)-(x+1)}$?

(A) $-\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x+1}$

(B) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x-1}$

(C) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x+1}$

(D) $-\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x-1}$

Quadratischer Faktor ohne reelle Nullstellen

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad (a > 0)$$

Noch Integrale

$$\int g'(x) f(g(x))\,dx = F\big(g(x)\big) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

Bsp.:

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \sin(x^2) + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}\,dx = \ln(x^2+3x+7) + C$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{3}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1) + 3\arctan(x) + C$$

Bsp.:

$$J = \int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$2x + 3 = (2x+2) + 1 = 2(\mathrm{x}+1) + 1$$

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$$

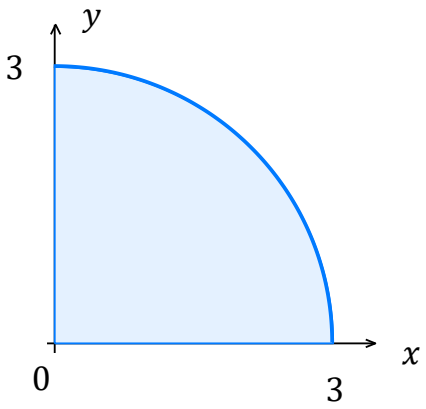
$$J = \int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1} + \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx$$

$$\underline{\underline{J = \ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1) + C}}$$

Zusatzaufgaben: Substitution und Rekursion

Geg.:

$$I = \int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx$$



Ges.: Integralwert. Verwende x = 3 sin(u)

$$x = 3\sin(u), \quad dx = 3\cos(u)\, du, \quad 0 \le u = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) \le \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 - 9\sin^2(u)}\; 3\cos(u)\, du$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9(1 - \sin^2(u))}\, 3\cos(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos(u)\, 3\cos(u) du$$

$$I = 9\int_0^{\pi/2} \cos^2 u\, du = 9\frac{(2-1)}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^0 u\, du = 9\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1\, du = 9\,\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

$$\underline{\underline{I = \frac{9\pi}{4}}}$$

SC 13 (III) In welches Integral geht das Integral $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\, dx$ durch die Substitution $u = \cos x$ über?

(A) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{1}{u^2 - 1}\, du$

(B) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\, du$

(C) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\, du$

(D) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{u^2 - 1}\, du$

Spezielle Funktionen ohne elementare Stammfunktion:

$$\int e^{\pm x^2}\,dx \qquad \int \sin(x^2)\,dx$$

$$\int \frac{1}{\ln(x)}\,dx \qquad \int \cos(x^2)\,dx$$

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \int \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \qquad \int \frac{\cos(x)}{x}\,dx$$



Tipps zur Serie 10: Aufgabe 1

a) $u = x^2$ .Welche Standardform entsteht im Nenner?

b) $\cosh x$ mit Exponentialfunktionen schreiben, dann $u = e^x$.

c) Erst $u = x^2$ mit neuen Grenzen, danach partiell integrieren.

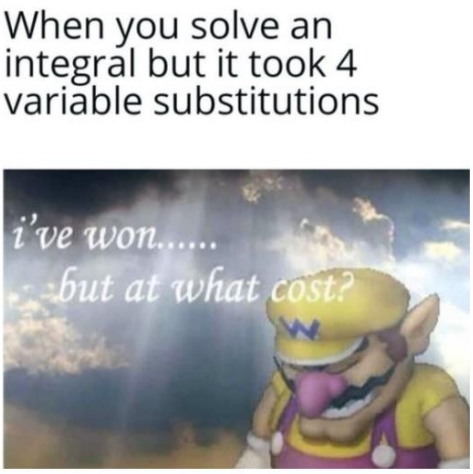
d) $u = \sqrt{e^x - 1} > 0$ .Bestimme auch dx.

e) $2x = \cos u$. Neue Grenzen und Wertebereich von arcsin prüfen.

f) Nenner gruppieren. Doppelte Nullstelle im Ansatz beachten.

g) $x^2 + 1$ ist ein Faktor. Über quadratische Faktoren kommt $Ax + B$.

h) x^2 ausklammern. Ansatz: $A/x + B/x^2 + (Dx + E)/(x^2 + 2)$.



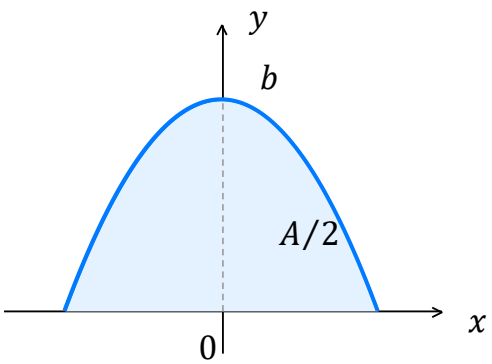
Tipps zur Serie 10: Aufgaben 2 und 3

2. Eine ganze Familie von Parabeln

Geg.: $y = -ax^2 + b$, $a, b > 0$. Fläche mit der x-Achse: $4/3$.

Ges.: Alle passenden Parameterpaare a und b.

Zuerst Nullstellen bestimmen.
Dann die Symmetrie zur y-Achse nutzen.
Die Fläche als Integral aufschreiben
und gleich 4/3 setzen.



Gesucht ist eine Familie, keine einzelne Parabel.

3. Eine Folge von Integralen

Geg.: $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$, $n \geq 0$.

Ges.: a) I_0, I_1. b) Rekursion. c) I_5. d) Grenzwert (Zusatz).

a) I_0 direkt berechnen. Für I_1: $\ln x = \ln x \cdot 1$.

b) Partiell mit $u = (\ln x)^n$ und $v' = 1$. Welches I_k bleibt übrig?

c) Mit den Startwerten Schritt für Schritt bis I_5 rechnen.

d) Bei $e - \varepsilon$ aufteilen. Links ist $\ln x \leq q < 1$. Rechts ist das Intervall nur ε breit.