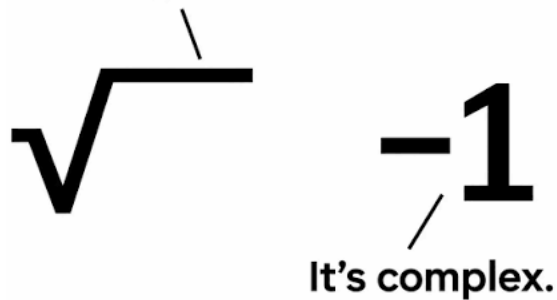


Analysis 1 - Übung 6



Why can't we
be together?



Komplexe Zahlen

Welche Zahl ergibt beim Quadrieren -1 ?

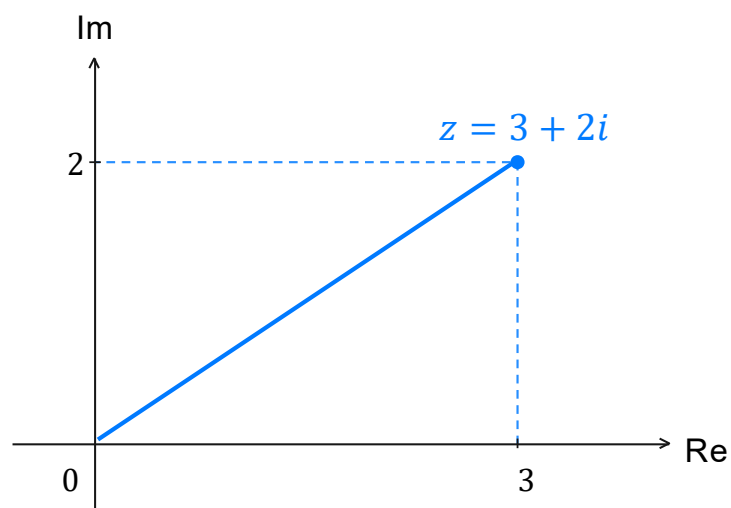
Bei den reellen Zahlen geht das nicht. Dafür führen wir i ein.

$$i^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad z^2 = -1: \quad z = i \text{ oder } z = -i$$

Eine komplexe Zahl besteht aus einem Realteil und einem Imaginärteil.

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Re}(z) = a, \quad \operatorname{Im}(z) = b$$



Bei $z = 3 + 2i$ ist der Imaginärteil 2, nicht $2i$.

Rechnen mit komplexen Zahlen

Addieren und Subtrahieren

Realteile zusammen, Imaginärteile zusammen.

$$(3 + 2i) + (1 - 4i) = 4 - 2i$$

$$(3 + 2i) - (1 - 4i) = 2 + 6i$$

Multiplizieren

Wie gewohnt ausmultiplizieren. Danach $i^2 = -1$ einsetzen.

$$(3 + 2i)(1 - 4i) = 3 - 12i + 2i - 8i^2 = 11 - 10i$$

Potenzen von i

Nach vier Schritten beginnt alles wieder von vorne.

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$

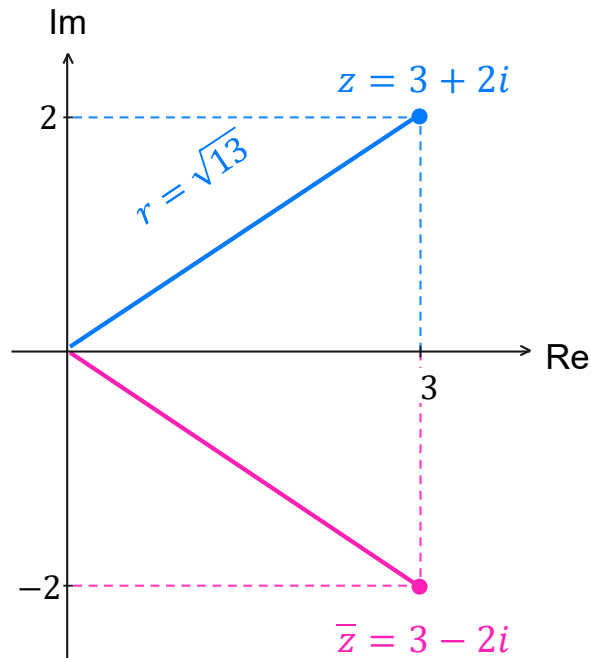
$$i^{27} = i^{4 \cdot 6 + 3} = (i^4)^6 i^3 = -i$$

Tipp: Den Exponenten durch 4 teilen. Nur der Rest zählt.

Komplex konjugierte $\bar{z}$ und Betrag

Komplex konjugieren: Nur das Vorzeichen vor dem Imaginärteil wechseln.

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$



Der Betrag ist die Länge vom Ursprung bis zum Punkt.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad |3 + 2i| = \sqrt{13}$$

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Die Konjugierte ist die Spiegelung an der reellen Achse.

$$\overline{\bar{z}} = z, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

Wichtig: $|z|$ ist eine nichtnegative reelle Zahl.

Dividieren

Wir wollen das i aus dem Nenner entfernen.

Dazu erweitern wir mit dem konjugierten Nenner.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad z_2 \neq 0$$

Bsp.

$$\frac{3+i}{1+2i}$$

Der konjugierte Nenner ist $1 - 2i$. Oben und unten damit multiplizieren.

$$\frac{3+i}{1+2i} = \frac{(3+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

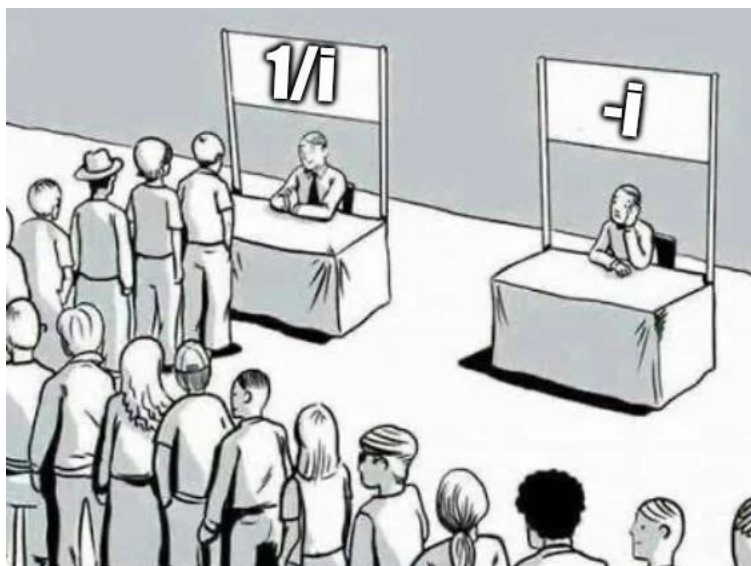
$$\begin{aligned} \frac{(3+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} &= \frac{3 - 6i + i - 2i^2}{1 + 4} = \frac{5 - 5i}{5} \\ &= 1 - i \end{aligned}$$

$$\frac{3+i}{1+2i} = \frac{5-5i}{5} = 1-i$$

Check

$$(1-i)(1+2i) = 3+i$$

Erweitern heisst: Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplizieren.

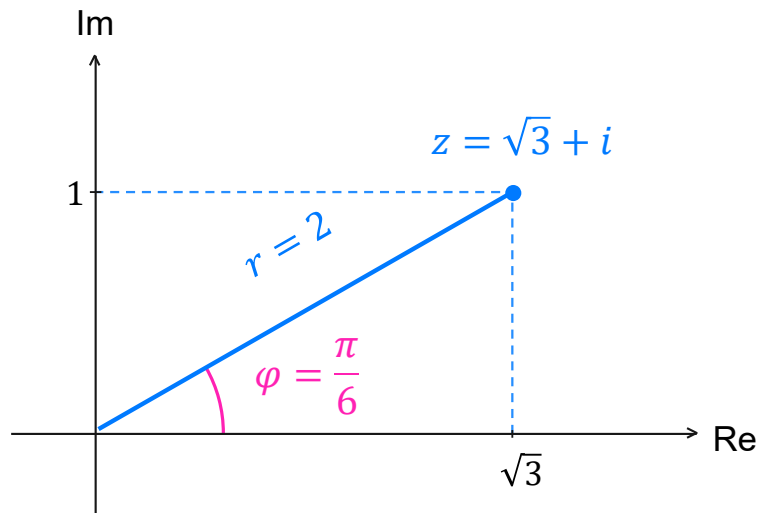


Polarform

Statt rechts/oben beschreiben wir einen Punkt mit Länge und Winkel.

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi$$



Bsp.

$$z = \sqrt{3} + i: \quad r = \sqrt{3 + 1} = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

Den Winkel ab der positiven reellen Achse gegen den Uhrzeigersinn messen.

Bei $z = 0$ ist $r = 0$. Der Winkel ist dort nicht festgelegt.

Den richtigen Winkel finden

Zuerst den Punkt grob einzeichnen. Dann den passenden Winkel bestimmen.

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r} \quad (r > 0)$$

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\varphi$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\sin\varphi$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Bsp. Linke obere Ecke

$$z = -\sqrt{3} + i, \quad r = 2$$

$$\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{6}$$

$\arctan(b/a)$ allein reicht nicht: Der Wert kann in der falschen Hälfte liegen.

Eine ganze Drehung ändert den Punkt nicht

$$\varphi \quad \text{und} \quad \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Für unsere Beispiele wählen wir einen Winkel $0 \leq \varphi < 2\pi$.

$$1: 0 \quad i: \frac{\pi}{2} \quad -1: \pi \quad -i: \frac{3\pi}{2}$$

Im Bogenmass rechnen: Eine volle Drehung entspricht 2π .

Eulerform und Rechenregeln

Die Eulerform schreibt dieselbe Zahl kürzer.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad z = re^{i\varphi}$$

Multiplizieren

Längen multiplizieren, Winkel addieren.

$$(r_1 e^{i\varphi_1})(r_2 e^{i\varphi_2}) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$(2e^{i\pi/6})(3e^{i\pi/3}) = 6e^{i\pi/2} = 6i$$

Dividieren

Längen teilen, Winkel abziehen.

$$\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad r_2 > 0$$

$$\frac{6e^{i\pi/2}}{2e^{i\pi/6}} = 3e^{i\pi/3}$$

Konjugieren

$$\bar{z} = re^{-i\varphi}$$

Addieren bleibt in der Form $a + bi$ meistens einfacher.

Potenzen

Die Länge potenzieren, den Winkel mit dem Exponenten multiplizieren.

$$(re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Bsp.

$$\frac{1}{(1+i)^4}$$

Zuerst $1+i$ in Eulerform schreiben.

$$1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

$$(1+i)^4 = (\sqrt{2})^4 e^{i\pi} = 4(-1) = -4$$

$$\frac{1}{(1+i)^4} = -\frac{1}{4}$$

Was passiert beim Multiplizieren mit i ?

$$i = e^{i\pi/2} \quad \Rightarrow \quad iz = re^{i(\varphi+\pi/2)}$$

Der Punkt dreht sich um 90° gegen den Uhrzeigersinn. Die Länge bleibt gleich.

$$z = 6 + 7i \quad \Rightarrow \quad iz = 6i + 7i^2 = -7 + 6i$$

Wichtig: r^n für die Länge, $n\varphi$ für den Winkel.

Wurzeln ziehen

Gesucht sind alle Zahlen, die beim Potenzieren dieselbe Zahl ergeben.

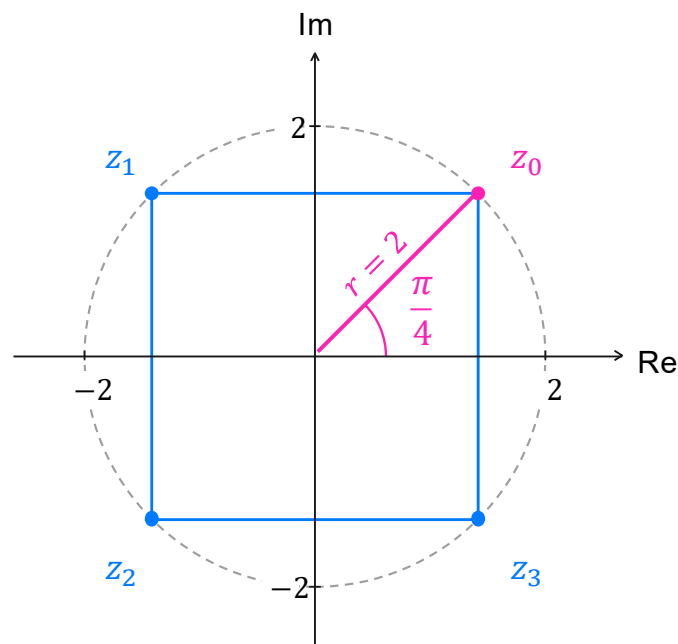
$$z^n = w = R e^{i\theta}, \quad R > 0, \quad n \in \{1, 2, \dots\}$$

$$z_k = \sqrt[n]{R} e^{i(\theta + 2\pi k)/n}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

Länge: n -te Wurzel. Startwinkel: θ/n . Dann jeweils $2\pi/n$ weiterdrehen.

Bsp.

$$z^4 = -16 = 16e^{i\pi} \Rightarrow z_k = 2e^{i(\pi/4 + k\pi/2)}$$



$$\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

Hier entstehen vier verschiedene Lösungen. Bei $w = 0$ gibt es nur $z = 0$.

Bereiche in der komplexen Ebene

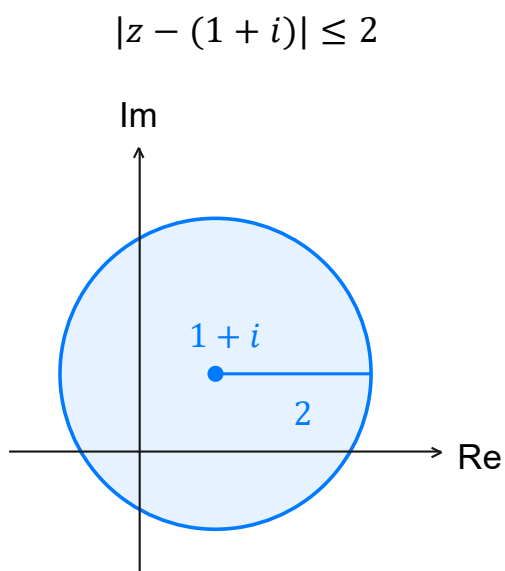
Ein Betrag beschreibt einen Abstand.

$$|z - z_0| = R: \text{ Kreislinie um } z_0 \text{ mit Radius } R$$

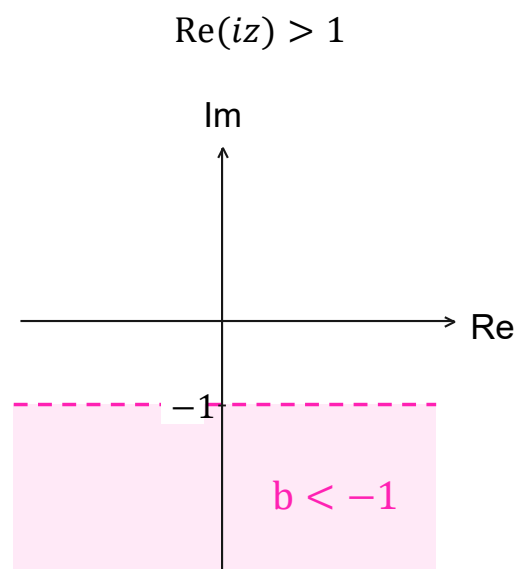
$$|z - z_0| < R: \text{ innen, ohne Rand } (R > 0)$$

Bsp. Kreis und Halbebene

$$|z - (1 + i)| \leq 2 \quad \text{und als zweites Beispiel:} \quad \operatorname{Re}(iz) > 1$$



Rand dabei



Rand nicht dabei

$$z = a + bi \Rightarrow iz = ai - b \Rightarrow -b > 1 \Rightarrow b < -1$$

Mittelpunkt $1 + i$, Radius 2, Rand dabei.

Unterhalb von $y = -1$, ohne Grenzlinie.

Mehrere Bedingungen

Jede Bedingung einzeln zeichnen. Dann nur die gemeinsame Menge behalten.

Rand dabei: durchgezogen. Rand ausgeschlossen: gestrichelt.

Trigonometrische Beziehungen

Dieselbe komplexe Zahl auf zwei Arten schreiben.
Dann Realteil und Imaginärteil vergleichen.

Bsp. Doppelter Winkel

$$e^{2ix} = (e^{ix})^2$$

$$\cos(2x) + i\sin(2x) = (\cos x + i\sin x)^2$$

Rechts ausmultiplizieren und $i^2 = -1$ einsetzen.

$$(\cos x + i\sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + i 2\sin x \cos x$$

Realteil mit Realteil vergleichen:

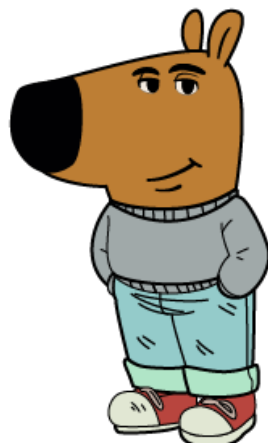
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Imaginärteil mit Imaginärteil vergleichen:

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

Für den dreifachen Winkel in Serie 6 funktioniert dieselbe Idee mit der dritten Potenz.

My GF is imaginary, but our
relationship is complex.
I'm just a chill guy



Tipps zur Serie 6

Aufgabe 1: Mengen skizzieren

Beträge als Abstände lesen. Bei mehreren Bedingungen zählt nur die gemeinsame Menge.

1a)

$|z| = 3$ beschreibt nur die Kreislinie. Behalte davon die Punkte mit $\operatorname{Im}(z) \geq 0$. Die Endpunkte zählen mit.

1b)

Setze $z = x + iy$. Zeichne die Grenze $y = x$ und prüfe einen Testpunkt. Bei $\geq$ gehört die Linie dazu.

1c)

Zeichne beide Kreise. Prüfe jeweils innen/aussen und schneide die Mengen. Beim kleinen Kreis ist der Rand dabei, beim grossen nicht.

1d)

Zuerst $z \neq -i$ festhalten. Mit dem Nenner multiplizieren, quadrieren, dann quadratisch ergänzen.

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4(x^2 + (y + 1)^2)$$

1e)

Vergleiche die Abstände zu $-3 + i$ und $-2i$.
Nach dem Quadrieren bleibt eine Gerade als Grenze.
Mit einem Testpunkt die richtige Seite wählen.
Dann den ersten Quadranten berücksichtigen.

Die Achsen sind ausgeschlossen.

Die Gleichheitsgrenze der Abstände gehört innerhalb des ersten Quadranten dazu.

Tipps zur Serie 6

Aufgabe 2a/b: Dreifacher Winkel

Eine Rechnung für beide Teile:

$$\cos(3x) + i\sin(3x) = (\cos x + i\sin x)^3$$

Ausmultiplizieren. $i^2 = -1$ und $i^3 = -i$ einsetzen. Real- und Imaginärteil vergleichen. Für die zweite Form $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nutzen.

Aufgabe 3a: Vierte Wurzeln zeichnen

$$z_k = \sqrt[4]{r} e^{i(\varphi + 2\pi k)/4}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Starte bei $\varphi/4$, dann jeweils $\pi/2$ weiter. Den Radius in die vierte Wurzel nehmen, nicht durch 4 teilen.

Hier ist $0 < r < 1$. Vergleiche r und $\sqrt[4]{r}$ vor dem Einzeichnen.

Aufgabe 3b: Kann die rechte Seite reell sein?

Nimm den einfachsten Punkt: $A = ir$ mit $r > 0$. Wo liegt A^5 ?
Für reelles w müsste das Ergebnis auf der reellen Achse liegen.

Aufgabe 3c: Gleiches Ergebnis beim Potenzieren

Die Beträge sind gleich. Die neuen Winkel müssen sich um ganze Umdrehungen unterscheiden.

$$n \left(\frac{5\pi}{16} + \frac{15\pi}{16} \right) = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Suche das kleinste positive ganze n . Setze es erst danach in $c = z_1^n$ ein.