

Aufgabe 2d: Warum wird aus dem Maximum ein Minimum?

Gegeben ist ein positives lokales Maximum von f_5 bei $t = -\frac{1}{2}$

Das dürfen wir benutzen, ohne es nochmals zu zeigen.

$$f_5(t) = |\tan(t^2 + t)|, \quad \tilde{f}_5(x) = \frac{1}{f_5\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Wir zeigen: $\tilde{f}_5$ hat bei $x = -2$ ein positives lokales Minimum.

Dafür brauchen wir keine Ableitungen.

1. Der Kehrwert macht aus dem Maximum ein Minimum

Bei positiven Zahlen gilt: Je grösser der Nenner, desto kleiner der Bruch.

Zum Beispiel: $2 < 4$, aber $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.

In der Nähe von $t = -\frac{1}{2}$ ist $f_5(t)$ nirgends grösser als am Maximum.

Weil f_5 dort stetig und positiv ist, bleibt sie auch ganz in der Nähe positiv.

$$0 < f_5(t) \leq f_5\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{f_5(t)} \geq \frac{1}{f_5\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

Der Kehrwert ist also genau dort am kleinsten.

Aus dem lokalen Maximum wird ein lokales Minimum.

2. Warum liegt die neue Stelle bei $x = -2$?

In der neuen Funktion setzen wir $\frac{1}{x}$ in f_5 ein. Dieser Input soll die alte Stelle $-\frac{1}{2}$ treffen:

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -2.$$

Auch die Nachbarschaft passt: Ist x nahe bei -2 , dann ist $\frac{1}{x}$ nahe bei $-\frac{1}{2}$. Deshalb gilt dort:

$$\tilde{f}_5(x) = \frac{1}{f_5\left(\frac{1}{x}\right)} \geq \frac{1}{f_5\left(-\frac{1}{2}\right)} = \tilde{f}_5(-2) > 0$$

Alle Werte in der Nähe sind also mindestens so gross wie der Wert bei -2 .

Genau das bedeutet: **positives lokales Minimum bei $x = -2$.**

$$\underbrace{f_5(t) \mapsto \frac{1}{f_5(t)}}_{\text{Maximum wird Minimum}}$$

Maximum wird Minimum

$$\underbrace{\frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -2}_{\text{Die Stelle verschiebt sich}}$$

Die Stelle verschiebt sich

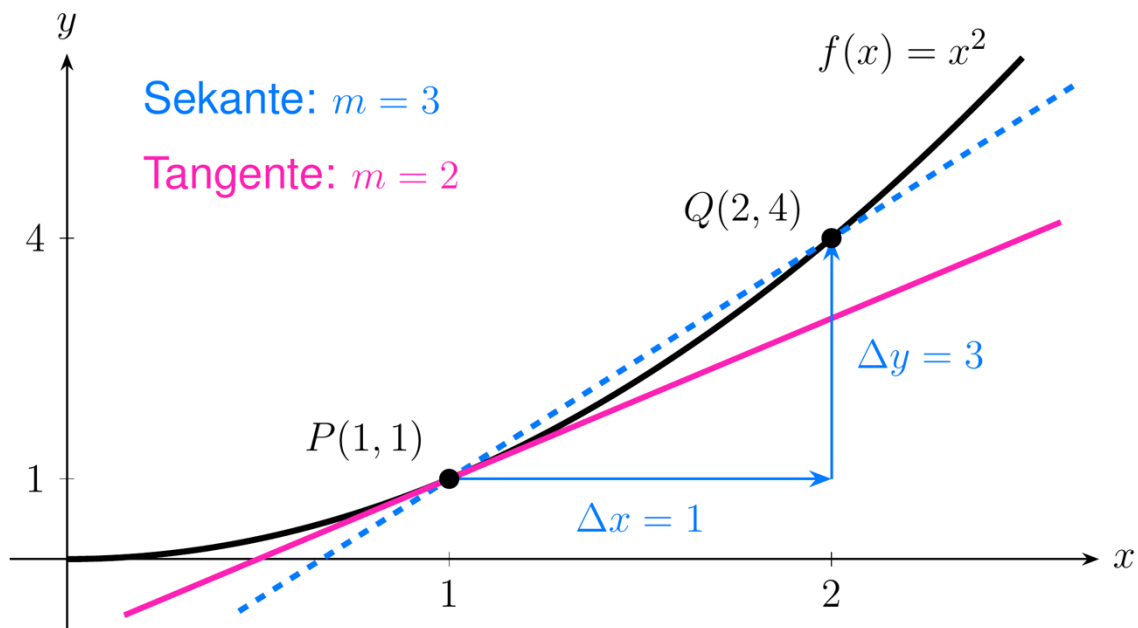
Analysis 1 - Übung 4

Differenzenquotient

Zeigt die mittlere Änderungsrate der Funktion über ein Intervall h

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0$$

Sekante: Gerade durch beide Punkte. h ist die Änderung in x -Richtung.



Bsp.

$$f(x) = x^2, \quad x_0 = 1$$

$$\frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h$$

h	1	0.5	0.1	0.01
Steigung	3	2.5	2.1	2.01

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow m \rightarrow 2$$

Differentialquotient = Differenzenquotient mit $\lim_{h \rightarrow 0}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Wenn es den Differentialquotienten in h gibt
(d. h , der rechte und linke Grenzwert stimmen überein),
so ist die Funktion $f(x)$ in h differenzierbar.

Ist die Funktion $f(x)$ in h differenzierbar, so ist sie dort automatisch auch stetig.

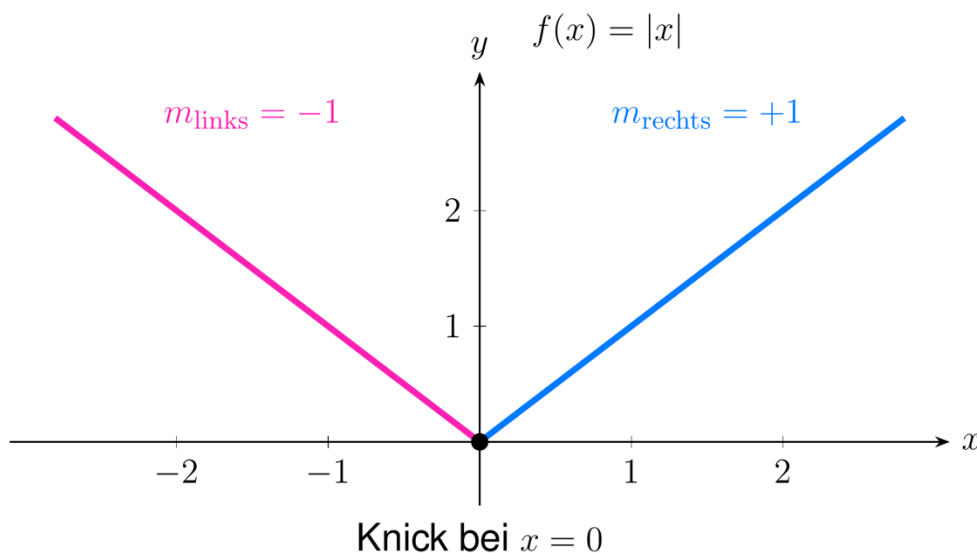
Bsp.

$$f(x) = x^2$$

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

Stetig $\nRightarrow$ differenzierbar!



$$f(x) = |x|: \quad \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1 \neq 1 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h}$$

Knick bei 0: keine Ableitung.

differenzierbar $\Rightarrow$ stetig nicht umgekehrt

Rechenregeln

Hier sind u, v differenzierbar.

Potenzen

Exponent nach vorne, dann um 1 kleiner.

$$(ax^n)' = anx^{n-1}, \quad (const)' = 0$$

Für reelle Exponenten: $x > 0$. Polynome gehen auf ganz $\mathbb{R}$.

$$(6x^7)' = 6 \cdot 7x^6 = 42x^6$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3}, \quad x \neq 0$$

Summe / Differenz

Jeden Term einzeln ableiten. Konstanten fallen weg, Vorfaktoren bleiben stehen.

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(3x^5 + 2x - 7)' = 15x^4 + 2$$

Produkt

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$f(x) = 4x^5(x^7 - x^2)$$

$$f'(x) = 20x^4(x^7 - x^2) + 4x^5(7x^6 - 2x)$$

Quotient und Kette

Quotientenregel

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0$$

Bsp.

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}, \quad x \neq -1$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

Kettenregel

Aussen ableiten, innen stehen lassen. Dann mal innere Ableitung.

$$(g(u(x)))' = g'(u(x)) u'(x)$$

Bsp.

$$f(x) = (3x^2 + 5)^3$$

$$u = 3x^2 + 5, \quad u' = 6x, \quad g(u) = u^3, \quad g'(u) = 3u^2$$

$$f'(x) = 3(3x^2 + 5)^2 \cdot 6x = 18x(3x^2 + 5)^2$$

Noch ein Bsp.

$$(\tan(g(x)))' = \frac{1}{\cos^2(g(x))} \cdot g'(x)$$

Hier: $\cos(g(x)) \neq 0$.Innere Ableitung nicht vergessen!

Bsp. mit Kettenregel

$$(\sin(5x^3))' = \cos(5x^3) \cdot 15x^2$$

$$((5e^{x^2}))' = 5e^{x^2} \cdot 2x = 10xe^{x^2}$$

$$(5\ln(x^2 + 2))' = 5 \frac{2x}{x^2 + 2}$$

Bsp. mit Produktregel

$$(x^2 \sin(x))' = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$$

Bsp. mit Quotientenregel

$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)' = \frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^2}, \quad x \neq 0$$

Spezialfälle

Winkel im Bogenmass! Bei einer Verkettung kommt die innere Ableitung dazu.

Funktion	Ableitung
$\sin(g(x))$	$\cos(g(x)) \cdot g'(x)$
$\cos(g(x))$	$-\sin(g(x)) \cdot g'(x)$
$\tan(g(x))$	$g'(x)/\cos^2(g(x)) = g'(x) + \tan^2(g(x)) \cdot g'(x)$
$\ln(g(x))$	$g'(x)/g(x)$
$e^{g(x)}$	$e^{g(x)} \cdot g'(x)$

Beim Tangens: $\cos(g(x)) \neq 0$.

Beim Logarithmus: $g(x) > 0$.

When you derive e^x



Umkehrfunktion ableiten

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

f auf einem Intervall umkehrbar und differenzierbar; am inneren Punkt $f' \neq 0$.

Bsp.

$$f(x) = x^2 + 2, \quad x \geq 0$$

Nur die rechte Hälfte nehmen! Sonst treffen zwei x denselben Wert.

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y - 2}, \quad y \geq 2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2f^{-1}(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y-2}}, \quad y > 2$$

Bsp. Tangens

$$f(x) = \tan(x), \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$f^{-1}(y) = \arctan(y), \quad y \in \mathbb{R}$$

$$(\arctan(y))' = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1 + y^2}$$

WICHTIG: f^{-1} ist die Umkehrfunktion, nicht $1/f$.

Lineare Ersatzfunktion = Tangenten

Nahe bei x_0 ersetzen wir die Funktion durch ihre Tangente.

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Bsp.

$$f(x) = x^2, \quad x_0 = 1: \quad f(1) = 1, \quad f'(1) = 2$$

$$t(x) = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1$$

Noch ein Bsp.

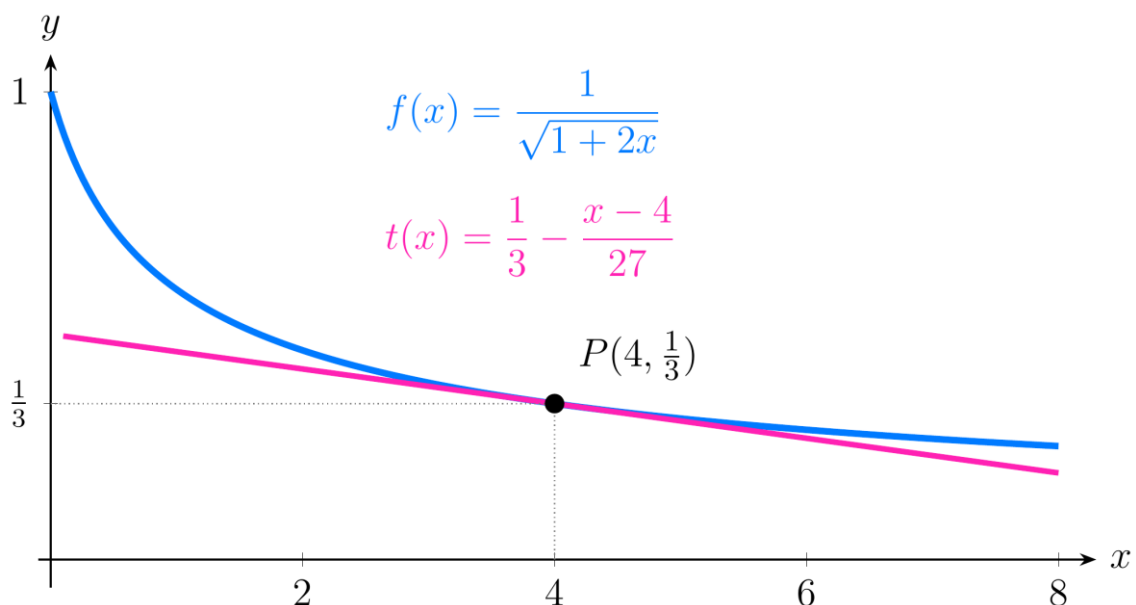
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}} = (1+2x)^{-1/2}, \quad x_0 = 4$$

Als Potenz schreiben. Dann Kettenregel. Hier: $x > -1/2$.

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1+2x)^{-3/2} \cdot 2 = -\frac{1}{(1+2x)^{3/2}}$$

$$f(4) = \frac{1}{3}, \quad f'(4) = -\frac{1}{27}$$

$$t(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{27}(x - 4) = \frac{13 - x}{27}$$



Check: $t(x_0) = f(x_0)$ und $t'(x_0) = f'(x_0)$.

Tipps zur Serie 4:

Aufgabe 1: Ableitungsregeln;

Bei g) & h) Differentialquotient anwenden

Aufgabe 2: Gerade = $f(-x) = f(x)$ & Ungerade = $f(-x) = -f(x)$

In Differentialquotient einsetzen

→ Umformen & $f(-x) = f(x)$ bzw $f(-x) = -f(x)$ nutzen

→ Substituiert ab bestimmten Punkt $u = -\Delta x$

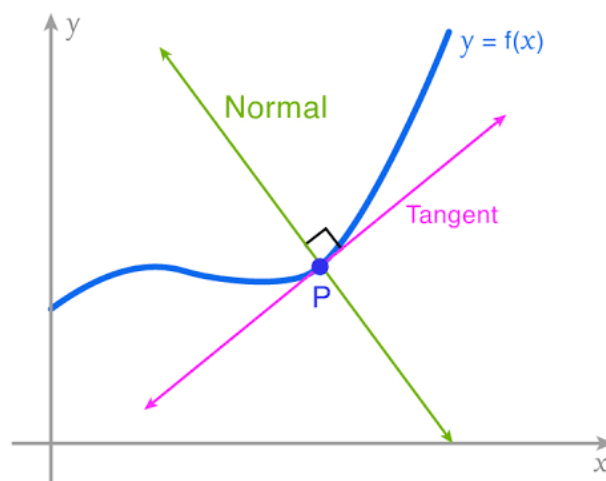
Aufgabe 3: Tangente bilden;

Orthogonale Steigung bilden;

Der Schnittpunkt durch Gleichsetzen beider Tangenten

(Aufpassen: Flüchtigkeitsfehler!!!)

Tangent and Normal Lines



Equations

Tangent line: $y - y_0 = f'(x_0) (x - x_0)$

Normal line: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} (x - x_0)$