

Analysis 1 - Übung 3Stetigkeit

Stetig heisst anschaulich: Wir können den Graphen ohne Absetzen zeichnen. An der Stelle a darf nichts «springen».

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Von links und rechts kommt derselbe Wert heraus.
Dieser Wert muss auch $f(a)$ sein.

Am Rand eines Intervalls schauen wir nur von der erlaubten Seite.

Recap: Schreibweise

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

D : erlaubte x -Werte
 $f(D)$: erreichbare y -Werte

Menge: Wir sammeln alle x , die eine Bedingung erfüllen.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\} \quad \text{oder z.B.} \quad \{1, 2, 3\}$$

Intervalle: eckig = Rand dabei, rund = Rand nicht dabei.

$$(a, b) : a < x < b \quad [a, b] : a \leq x \leq b$$

$$(a, b] : a < x \leq b \quad [a, b) : a \leq x < b$$

Bei $-\infty$ und $+\infty$ ist die Klammer immer rund.

Lücken und Sprünge

Hebbare Lücke

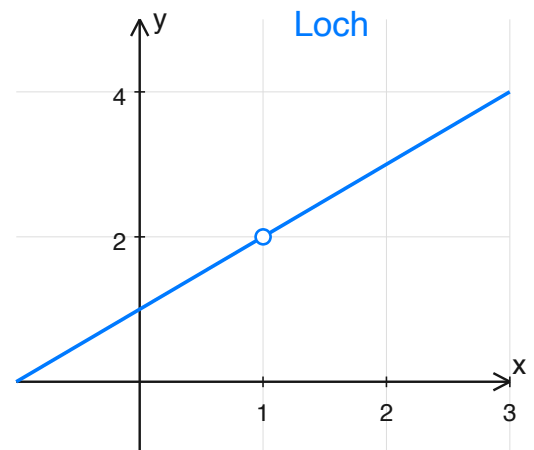
Hier fehlt nur ein Punkt.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

Kürzen geht nur für $x \neq 1$!

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Setzen wir $f(1) = 2$, ist das Loch zu.



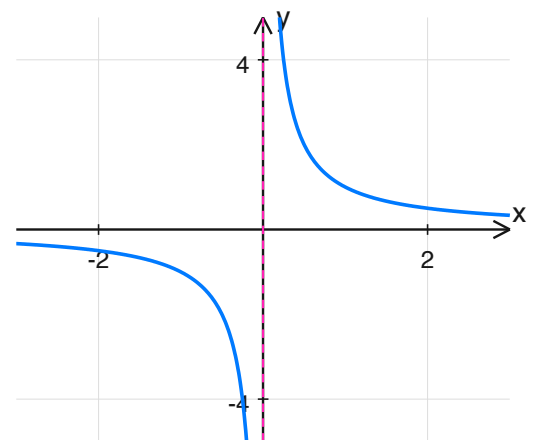
Polstelle

Der Graph läuft nach oben oder unten weg.

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

$$x \rightarrow 0^- : g(x) \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow 0^+ : g(x) \rightarrow +\infty$$

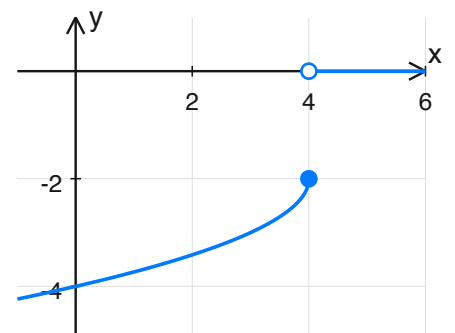


Sprungstelle

$$h(x) = \begin{cases} -2 - \sqrt{4 - x}, & x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Links: -2 Rechts: 0

Die beiden Seiten passen nicht zusammen.



Zwischenwertsatz

Stetig = kein Sprung. Starten wir unter einer Höhe und landen darüber, müssen wir diese Höhe irgendwo treffen.

f stetig auf $[a, b]$, m zwischen $f(a)$ und $f(b)$

$\Rightarrow$ mindestens ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = m$

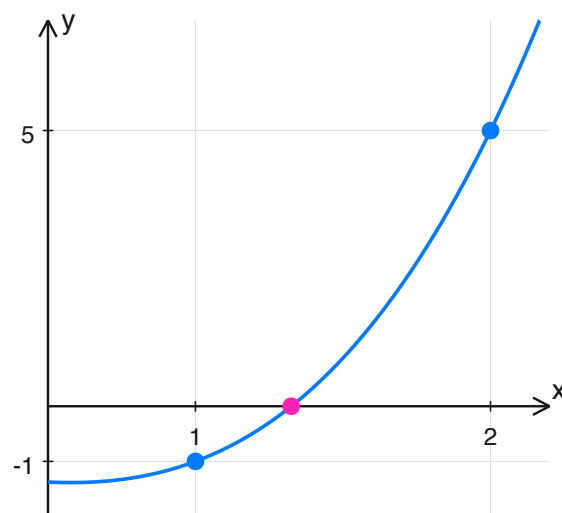
Bsp. 1: Gibt es eine Nullstelle?

$$f(x) = x^3 - x - 1$$

Polynom $\rightarrow$ stetig

$$f(1) = -1 < 0$$

$$f(2) = 5 > 0$$



Also liegt eine Nullstelle zwischen 1 und 2.

Der ZWS sagt: mindestens eine. Er sagt nicht, wo genau.

Bsp. 2: Geht auch $h(x) = -\pi$?

Wir nehmen den linken Teil von h aus dem letzten Beispiel.
Auf $[-1, 4]$ ist dieser Teil stetig.

$$h(-1) = -2 - \sqrt{5} < -\pi < -2 = h(4)$$

$-\pi$ liegt dazwischen $\rightarrow$ es gibt ein passendes x in $(-1, 4)$.

Graphen verschieben und strecken

Bsp. $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$

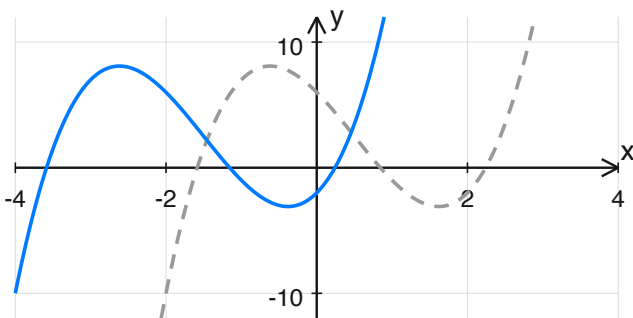
Grau gestrichelt: $p(x)$ Blau: veränderter Graph

In x-Richtung verschieben

$$f(x - a)$$

$a > 0$: rechts $a < 0$: links

$p(x + 2)$: 2 nach links

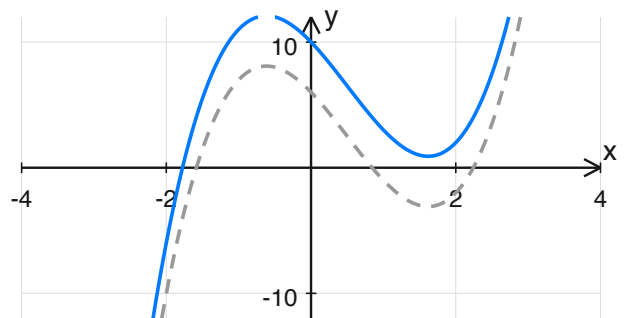


In y-Richtung verschieben

$$f(x) + b$$

$b > 0$: oben $b < 0$: unten

$p(x) + 4$: 4 nach oben

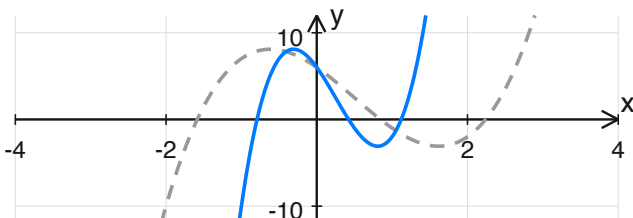


In x-Richtung strecken/stauchen

$$f(cx), \quad c \neq 0$$

Breite $\times 1/|c|$. Für $c < 0$:
zusätzlich an der y-Achse spiegeln.

$p(2x)$: halb so breit

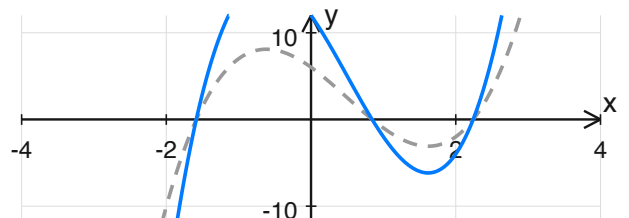


In y-Richtung strecken/stauchen

$$d \cdot f(x)$$

Höhe $\times |d|$. Für $d < 0$:
zusätzlich an der x-Achse spiegeln.

$2p(x)$: doppelt so hoch



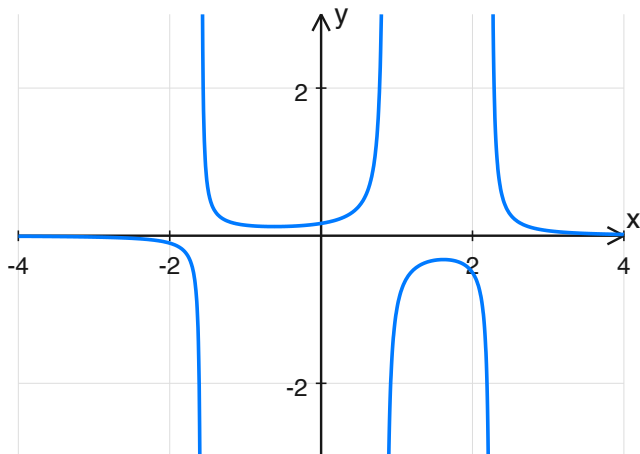
Kehrwert und Umkehrfunktion

Kehrwert der y-Werte

$$\frac{1}{f(x)}$$

Jeder y-Wert wird zu $1/y$.
Nur möglich, wenn $f(x) \neq 0$.

Bsp. $1/p(x)$

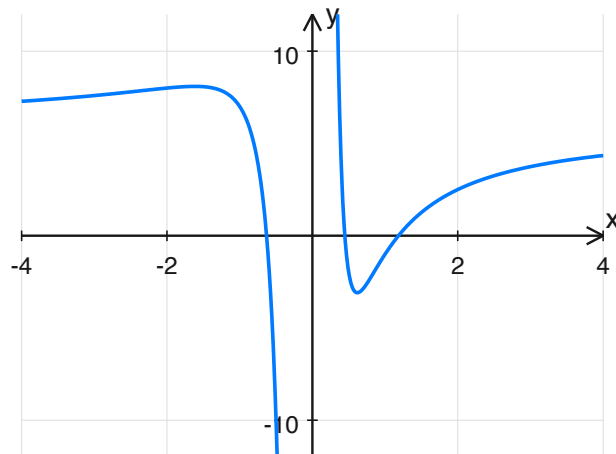


Kehrwert im x einsetzen

$$f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Erst $1/x$ rechnen, dann f anwenden.
 $x \neq 0$ und $1/x$ muss in D liegen.

Bsp. $p(1/x)$



$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)} \quad \text{im Allgemeinen}$$

Umkehren: Welches x hat diesen y-Wert geliefert?

$$x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \text{ oder } x = -3$$

Zwei Möglichkeiten. So können wir nicht eindeutig zurückrechnen.

$$x^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \text{eindeutig!}$$

Injektiv, surjektiv, bijektiv

D = Definitionsbereich Z = Zielbereich

Injektiv

Kein y-Wert wird von zwei verschiedenen x getroffen.

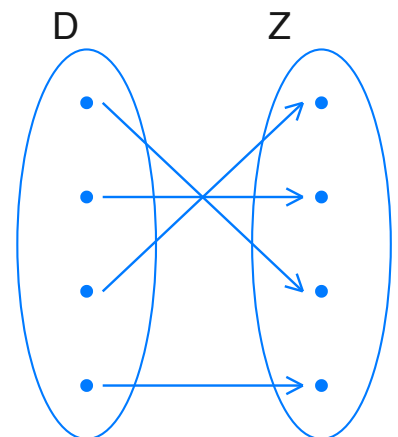
$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{injektiv}$$

$$g(x) = x^2 : \quad g(-2) = g(2) = 4$$

x^2 auf $\mathbb{R}$ ist also nicht injektiv.

Graph-Test: Jede waagerechte Linie trifft höchstens einmal.

Zum Rechnen: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$



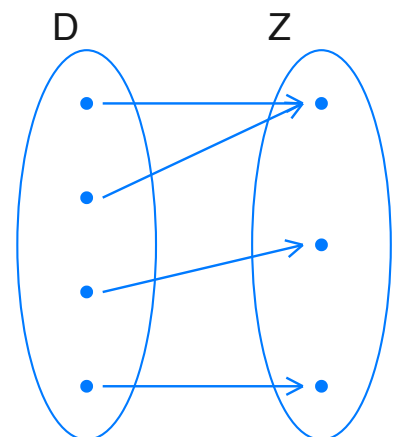
Surjektiv

Jeder Wert im Zielbereich wird getroffen.

$$x^3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{surjektiv}$$

$$e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{nicht surjektiv}$$

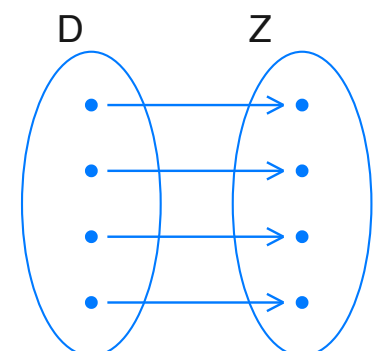
e^x ist immer positiv. 0 und negative Zielwerte werden nie erreicht.



Bijektiv

injektiv + surjektiv = bijektiv

Jeder Zielwert wird genau einmal getroffen.
Dann können wir eindeutig zurückrechnen.



Umkehrfunktion bestimmen

Wir gehen rückwärts: Aus dem Output wird wieder der Input.

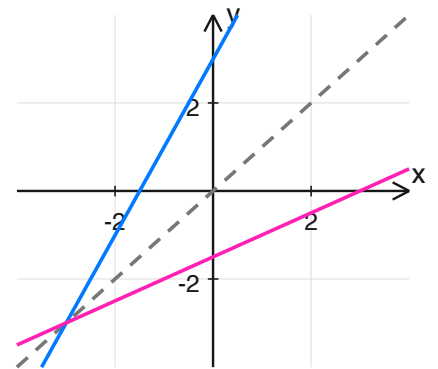
$$y = f(x) \rightarrow \text{nach } x \text{ auflösen} \rightarrow x, y \text{ tauschen}$$

Bijektiv? Keine doppelten Ergebnisse, Zielbereich = Bild.
Falls nötig: D einschränken und Z = Bild setzen.

Bsp. 1 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$y = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{y - 3}{2}$$

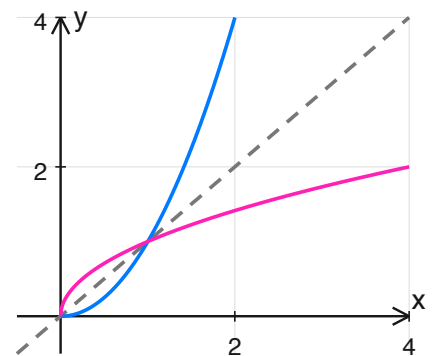
$$f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$



Bsp. 2 $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$

$$y = x^2, \quad x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{y}$$

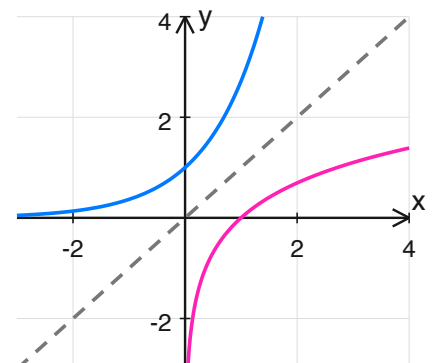
$$g^{-1}(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$$



Bsp. 3 $h : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$

$$y = e^x \Rightarrow x = \ln y$$

$$h^{-1}(x) = \ln x, \quad x > 0$$



Blau: f Pink: f⁻¹ Spiegelung an y = x (gestrichelt)

Umkehrfunktion: weitere Beispiele

Bsp. 4: Bruchfunktion

$$i(x) = \frac{x-1}{x+2}, \quad i: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$y(x+2) = x-1$$

× (x + 2)

$$yx + 2y = x - 1$$

$$yx - x = -1 - 2y$$

Alle x auf eine Seite.

$$(y-1)x = -1 - 2y$$

x ausklammern.

$$x = -\frac{2y+1}{y-1}$$

÷ (y - 1), also y ≠ 1

$$i^{-1}(x) = -\frac{2x+1}{x-1}, \quad x \neq 1$$

Der Zielbereich der Umkehrfunktion ist $\mathbb{R}$ ohne -2.

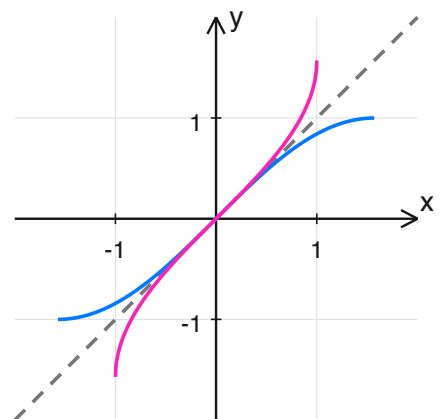
Bsp. 5: Sinus

Sinus trifft denselben y-Wert mehrmals.

Wir nehmen deshalb nur das Stück $[-\pi/2, \pi/2]$.

$$\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Bei der Umkehrfunktion tauschen Definitionsbereich und Bild die Rollen.

Asymptoten

Für waagerechte, schiefe und polynomiale Asymptoten gilt:
Der Abstand in y-Richtung geht gegen 0.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

$+\infty$ und $-\infty$ immer einzeln prüfen.

Waagerechte Asymptote

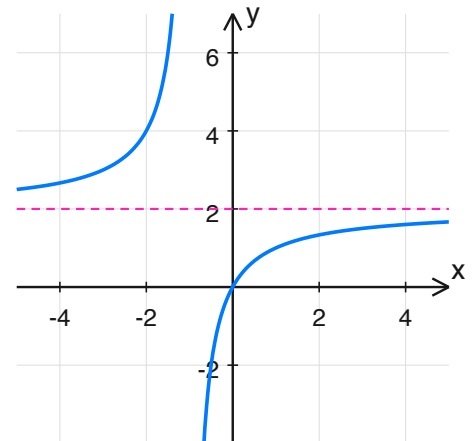
Geht $f(x)$ gegen die Zahl b , ist $y = b$ die Asymptote.

Bsp. 1

$$f(x) = \frac{2x}{x+1} = 2 - \frac{2}{x+1}$$

Der Bruch rechts geht gegen 0.

$$\Rightarrow y = 2$$



Bsp. 2

Für grosse $|x|$ (also $x \neq 0$):

$$\frac{4x^2 + 3}{2x^2 - 1} = \frac{4 + 3/x^2}{2 - 1/x^2} \rightarrow \frac{4}{2} = 2$$

Durch die grösste Potenz teilen: hier x^2 .

Für $+\infty$ und $-\infty$ kommt wieder $y = 2$ heraus.

Senkrechte Asymptote

Wenn $f(x)$ bei $x = a$ nach $+\infty$ oder $-\infty$ läuft, ist $x = a$ eine senkrechte Asymptote. Eine Seite genügt.

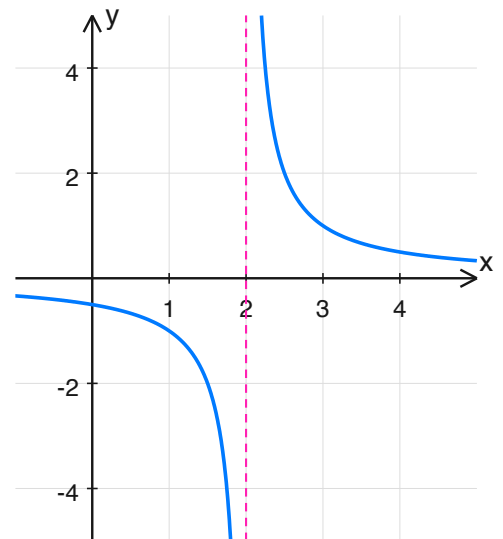
Bsp. 1

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$x \rightarrow 2^- : f(x) \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow 2^+ : f(x) \rightarrow +\infty$$

Asymptote: $x = 2$



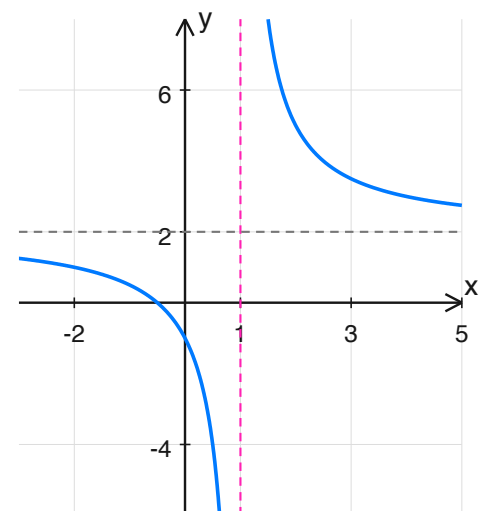
Bsp. 2

$$g(x) = \frac{2x+1}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$$

$$x \rightarrow 1^- : g(x) \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow 1^+ : g(x) \rightarrow +\infty$$

Asymptote: $x = 1$



WICHTIG: Nenner = 0 reicht nicht! Erst Kürzen prüfen.
Sonst kann es auch nur ein Loch sein (wie auf Seite 2).

Schiefe und quadratische Asymptoten

Bei Brüchen hilft Polynomdivision. Der Restbruch soll gegen 0 gehen.
Zählergrad = Nennergrad + 1 → schiefe Gerade.

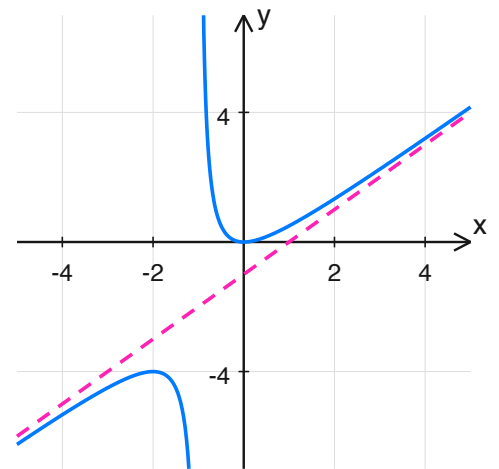
Bsp. 1: Schiefe Gerade

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned}x^2 - (x^2 + x) &= -x \\ -x - (-x - 1) &= 1\end{aligned}$$

Rest = 1

$$g(x) = x - 1$$



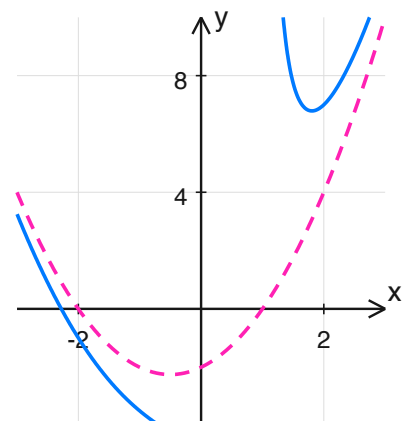
Bsp. 2: Auch eine Parabel geht

$$\frac{x^3 - 3x + 5}{x - 1} = x^2 + x - 2 + \frac{3}{x - 1}$$

$$\begin{aligned}x^3 - (x^3 - x^2) &= x^2 \\ x^2 - 3x - (x^2 - x) &= -2x \\ -2x + 5 - (-2x + 2) &= 3\end{aligned}$$

Rest = 3 → Restbruch geht gegen 0.

$$g(x) = x^2 + x - 2$$



Tipps zur Serie 3

Aufgabe 1

Vergleiche jeden Graphen mit f_1 .

Was hat sich geändert: Lage, Breite, Höhe oder Vorzeichen?

Änderung im Argument $\rightarrow$ x-Richtung.

Änderung ausserhalb von $f \rightarrow$ y-Richtung.

Aufgabe 2

Bei injektiv und surjektiv die Bereiche immer mitlesen.

$$|x| = |-x| \quad \Rightarrow \quad \text{auf } \mathbb{R} \text{ nicht injektiv}$$

$$|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) \quad \text{ist surjektiv}$$

Bild = tatsächlich erreichte Werte.

Zielbereich = die Menge rechts vom Pfeil.

Bei min und max: Welche Werte kommen wirklich heraus?

Bei Brüchen: zuerst vereinfachen und verbotene x-Werte behalten.

Aufgabe 3 / 4a

Asymptote gefunden? Den Abstand prüfen:

$$f(x) - g(x) \rightarrow 0$$