

Analysis 1 - Übung 2Recap:

- arithmetische Folge + Reihe

► Explizit: $a_n = a_1 + d(n - 1)$ Rekursiv: $a_n = a_{n-1} + d$

► $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{2} \cdot n[a_1 + a_n]$ *oder* $S_n = \frac{1}{2} \cdot n[2a_1 + d(n - 1)]$

- geometrische Folge + Reihe

► Explizit: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ Rekursiv: $a_n = a_{n-1} \cdot q$

► $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^n) = a_1 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$S_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1(1 + q + q^2 + \dots) = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q},$ *falls* $|q| < 1$

WICHTIG: Für die rekursive Darstellung braucht es einen Ankerpunkt/Startwert!

- konvergent $\Rightarrow$ besitzt einen Grenzwert $\Rightarrow$ beschränkt
- konvergent $\Rightarrow$ beschränkt $\nRightarrow$ divergent/konvergent
- konvergent $\nRightarrow$ monoton wachsend/fallend
- divergent falls nicht konvergent

Harmonische Reihe

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \infty$$

$$1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

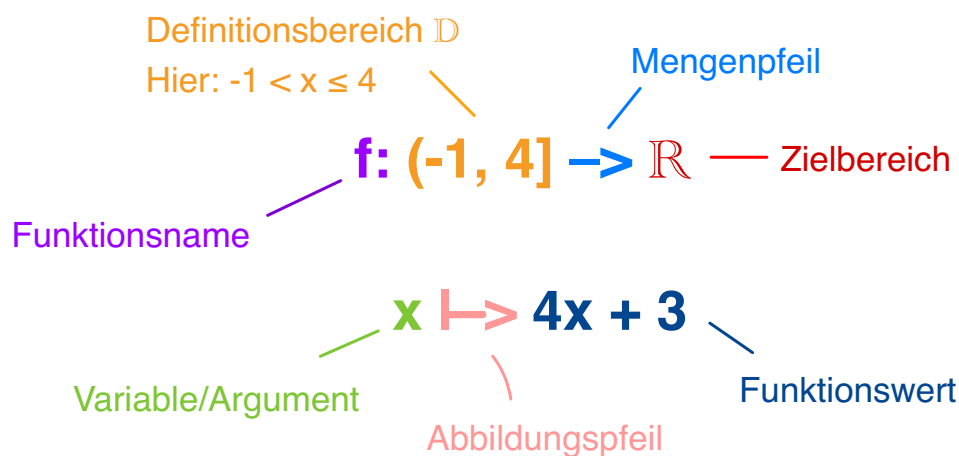
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

⋮

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty$$



Funktionen

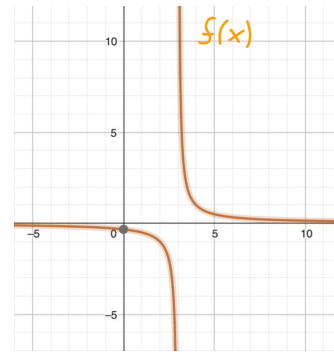


- Bild/Wertebereich: Alle “erreichbaren” Funktionswerte

Für $f(x) = 4x + 3$ mit $\mathbb{D} = (-1, 4]$ ist das **der Wertebereich/das Bild** $\mathbb{W}(f) = \text{Im}(f) = (-1, 19]$

Bsp.

$$\bullet f(x) = \frac{1}{x-3} \quad \mathbb{D}(f) \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad \mathbb{W} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



$$\bullet g(x) = \frac{x-15}{\sqrt{x}-4} \quad \mathbb{D}(f) \in \mathbb{R}^+ \setminus \{16\} \quad \mathbb{W} \in \mathbb{R} \setminus (6, 10)$$



• Thermometer $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Input: Punkt mit Koordinaten (x, y, z)

Output: Temperatur in °C

$$\mathbb{W} = [-273.15, \infty)$$

• Barometer: $[0, 10000\text{m}] \rightarrow \mathbb{R}$

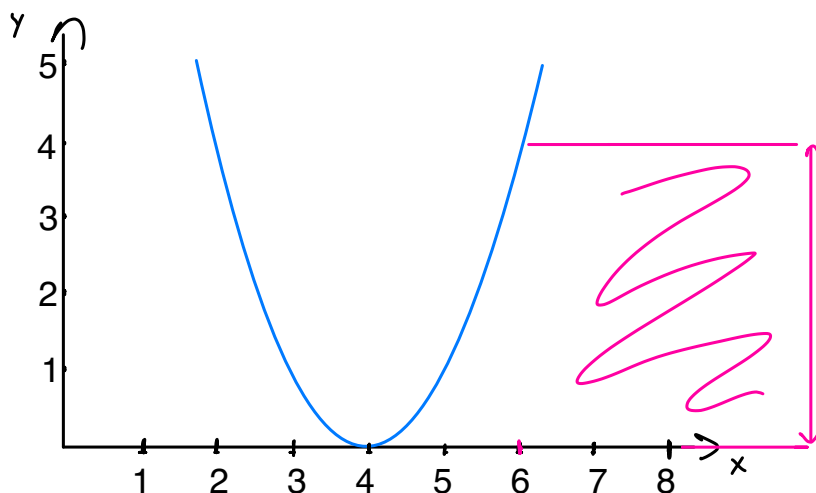
Input: Höhe in m

Output: Druck in bar

$$\mathbb{W} = (0, 1]$$

$$\bullet f(x) = (x-4)^2$$

$$\mathbb{D} = [2, 6]$$



Alle Werte dazwischen werden erreicht $\Rightarrow \mathbb{W}(f) = [0, 4]$

Arten von Funktionen

1) Potenzfunktionen:

$$f(x) = a \cdot x^n \text{ mit } n, a \in \mathbb{R}$$

2) Polynom Funktionen:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \text{ mit } n \geq 0$$

3) Rationale Funktionen:

Quotient zweier Polynome

4) Trigonometrische Funktionen:

$$f(x) = \sin(x) \text{ oder } g(x) = \cos(x)$$

5) Exponential-/

$$f(x) = a^x = e^{x \ln(a)}$$

Logarithmusfunktionen:

$$f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Eigenschaften von Funktionen

1) Gerade Funktion: $f(x) = f(-x)$

Ungerade Funktion: $f(-x) = -f(x)$

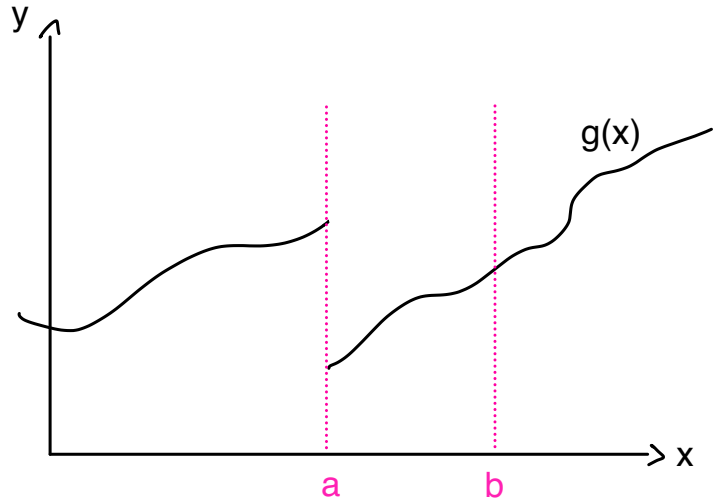
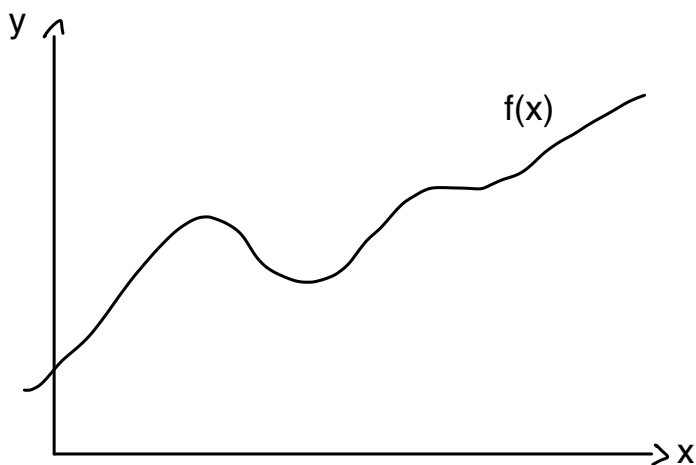
2) (Strikt) monoton wachsend für alle $x_1 < x_2$:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{bzw. } f(x_1) < f(x_2))$$

(Strikt) monoton fallend für alle $x_1 < x_2$:

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad (\text{bzw. } f(x_1) > f(x_2))$$

Stetigkeit



Eine Funktion ist stetig, wenn man sie mit einem Strich zeichnen kann. (Kein Sprung)

→ f(x) ist stetig, g(x) ist nicht stetig

→ g(x) ist

• stetig in b :

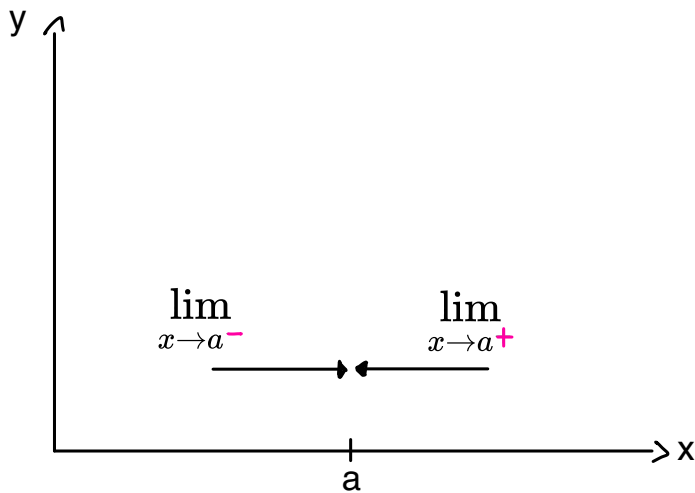
$$\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} g(x)$$

• nicht stetig in a :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$$

Grenzwerte von Funktionen (eine Auswahl von Methoden)

- Links- & Rechts-Grenzwerte und Betragsstriche



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{2|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{2(x-1)} = \frac{1}{2} //$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{2|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{2(-1)(x-1)} = -\frac{1}{2} //$$

Diese Funktion ist unstetig (im Punkt $x = 1$)

- Wert einsetzen

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2} //$$

Oft resultieren aber undefinierte Ausdrücke
 $\rightarrow 0/0, \infty/\infty, 0 \cdot \infty, \dots$

- Brüche Faktorisieren & Kürzen

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{(x+3)\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+3} = \frac{4}{5}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

- Brüche mit grösster Potenz kürzen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{x}}{2} = \frac{1}{2}$$

“Durch die grösste Potenz teilen”

• Wurzeln erweitern

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sqrt{x+4} - 2}^a \cdot \overbrace{\sqrt{x+4} + 2}^b}{\sqrt{x+4} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+4) - 4}{x(\sqrt{x+4} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$$

• Trigonometrische Funktionen (sin, cos, ...)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$$

Bsp.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(5x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x \cdot \cos(5x)} \quad \Rightarrow \text{Substitution: } \begin{array}{l} n = 5x \quad x \rightarrow 0 \\ x = n/5 \quad n \rightarrow 0 \end{array}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin(n)}{\frac{n}{5} \cdot \cos(n)} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{5 \sin(n)}{n \cdot \cos(n)} = \lim_{n \rightarrow 0} 5 \cdot \underbrace{\frac{\sin(n)}{n}}_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos(n)}}_1 = 5 //$$

Bsp.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x})}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{x}{\sin(x)}}_1 \cdot \underbrace{x \cdot \sin(\frac{1}{x})}_A = 1 \cdot A = 1 \cdot 0 = 0 //$$

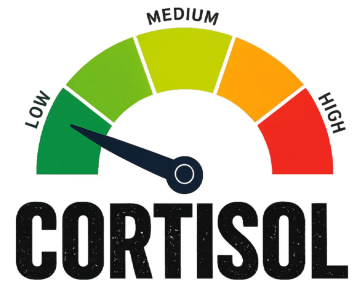
┌

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Substitution: $\begin{array}{l} u = 1/x \quad x \rightarrow 0 \\ x = 1/u \quad u \rightarrow \infty \end{array}$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\sin(u)}{u} = \boxed{0 = A}$$

└



$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

oder

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

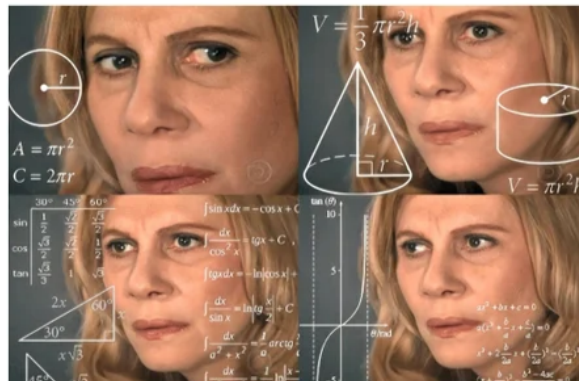
Bsp.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{0}{\sin(x)}}{\overset{0}{x}} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1 //$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{1}{\cos(x)} - \overset{0}{1}}{\overset{0}{x}} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos(x) - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{1} = 0 //$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{0}{\tan(5x)}}{\overset{0}{x}} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan(5x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \frac{1}{\cos^2(5x)}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{\cos^2(5x)} = 5 //$$

$$\tan(x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$



Serie 2

Abgabetermin für alle Aufgaben: *Dienstag, um 14:00 Uhr, online.*

Bemerkung: Wir haben einige Aufgaben in den Serien gekennzeichnet: Mit einem Stern (★) sind Aufgaben gekennzeichnet, die über den Prüfungsstoff hinausgehen, aber dennoch interessant sind. Mit einem Herz (♥) sind die (Teil-) Aufgaben gekennzeichnet, die besonders wichtig sind. Um den Anschluss in der Vorlesung nicht zu verlieren, sollten Sie zumindest diese Aufgaben bearbeiten.

Diese Woche schauen wir uns die Grundlagen von Funktionen etwas genauer an. Wir haben noch nicht alle gewohnten Werkzeuge aus der Differentialrechnung, aber trotzdem können wir in Aufgabe 1 schon einige Eigenschaften bestimmen und in Aufgabe 3 eine etwas spezieller definierte Funktion betrachten. In Aufgabe 2 üben wir ausserdem, wie sich Graphen von Funktionen unter Transformationen verschieben, strecken, quetschen, usw. Schliesslich rufen wir uns in Aufgabe 4 in Erinnerung, wie das mit Cosinus und Sinus nochmal ging – Und dass man geometrisch da echt viel herausholen kann!

1. (♥) Gegeben sei die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2 - 2x}. \quad \rightarrow \text{Funktion dritter Ordnung}$$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen von f . Für welche Werte von x ist die Funktion f positiv? Für welche negativ? Skizzieren Sie den Graph $\Gamma(f)$.

Hinweis: für den Graph können Sie z.B. das Bild ausgewählter Werte im Definitionsbereich berechnen und dann die Punkte miteinander verbinden. Was passiert mit der Funktion f in Umgebungen der Nullstellen des Nenners?

2. Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Gegeben sei das Polynom

$$p_x(y) = y^3 + 4y^2 + xy.$$

Wir definieren eine Funktion f durch

$$f : x \mapsto \text{kleinste Nullstelle von } p_x(y).$$

$\rightarrow$ Nullstellen $p(y)$ berechnen
 $\hookrightarrow$ Überlege für welche x welche
Nullstelle am kleinsten ist
 $\hookrightarrow$ evtl. Fallunterscheidung

Beschreiben Sie f durch eine Formel und skizzieren Sie den Graphen von f . Ist f stetig? Gibt es ein x mit $f(x) = -\pi$? (Sie müssen x dazu nicht berechnen!)

3. Es sei $A := (x, y)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis, d.h. $x^2 + y^2 = 1$. Weiter sei $B := (0, 0)$ der Ursprung des Koordinatensystems und $C := (x, 0)$ der Punkt auf der x -Achse mit derselben x -Koordinate wie A . Es bezeichne ABC das Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C (siehe die Figur weiter unten). Wir definieren $\alpha \in [0, 2\pi]$ als die Länge des Kreisbogens von Punkt $(1, 0)$ bis zum Punkt A , wenn man den Einheitskreis im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

- (a) (♥) Skizzieren Sie das Dreieck ABC im Spezialfall $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AC}$ in diesem Spezialfall. Was ist somit $\sin(\frac{\pi}{4})$? Und $\cos(\frac{\pi}{4})$? $\rightarrow$ Satz des Pythagoras
 (b) (♥) Zeigen Sie unter Verwendung der Beziehungen im Dreieck ABC : $\hookrightarrow$ Einheitskreis

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

für alle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Wieso gilt somit

Rechtwinkliges Dreieck zeichnen

$$-\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

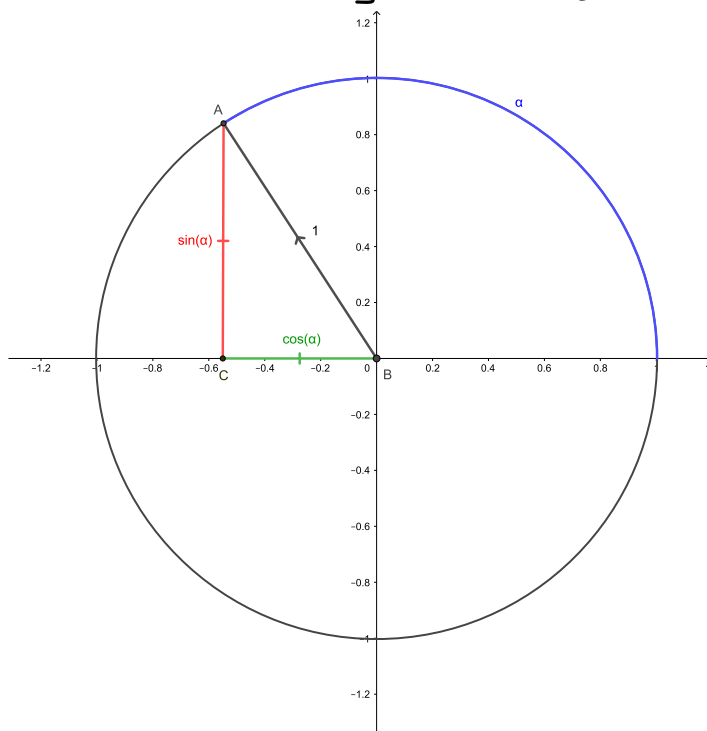
Mit Summe der Winkel arbeiten

für alle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$? (Bemerkung: Die hergeleiteten Beziehungen zwischen $\sin$ und $\cos$ in dieser Teilaufgabe gelten sogar für alle $\alpha \in \mathbb{R}$).

- (c) (♥) Zeigen Sie unter Verwendung der Beziehungen im Dreieck ABC :

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha),$$

für alle $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. (Bemerkung: Die hergeleitete Beziehung in dieser Teilaufgabe gilt sogar für alle $\alpha \in \mathbb{R}$). - Mit Zeichnung arbeiten, Ds von α nicht vergessen



- (d) Es sei $\arctan$ die Umkehrfunktion von $\tan$. Zeigen Sie die Gleichheit

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

für alle $x \geq 0$ mit Hilfe eines geeigneten Dreiecks ABC . (Es ist sinnvoll ein Dreieck zu verwenden bei dem eine Seite die Länge 1 hat).