

Analysis 1: Woche 1

Einführung, Folgen, Grenzwerte, Rechenregeln & Beispiele



WhatsApp Gruppe



Polybox Passwort: 12345678

Über mich

Abdu

- 23 Jahre alt
- 1. Semester Maschinenbau im Masterstudium
- Fussball Fan von Barcelona
- Interesse an Robotern => Focus: Robotics, Systems and Control
- Hobbys: Muscle Pump, Cycling, Squash, Padel etc.

Stellt gern Fragen!

- In der Übungsstunde
- Per mail: arazzakov@sudent.ethz.ch



WhatsApp Gruppe



Polybox Passwort: 12345678

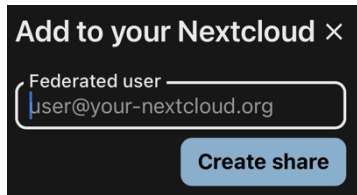
Polybox



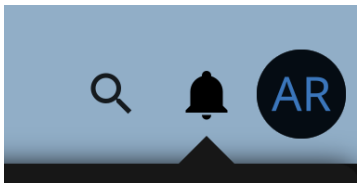
Drücke auf die drei Punkte rechts oben



Dann drücke auf “Hinzufügen zu Ihrer Nexcloud”
oder “Add to your Nexcloud”



Es erscheint ein Feld wo du **eth-kürzel@polybox.ethz.ch** eingibst



Öffne nun Polybox und **auf der Glocke** kannst du Freigabe erteilen

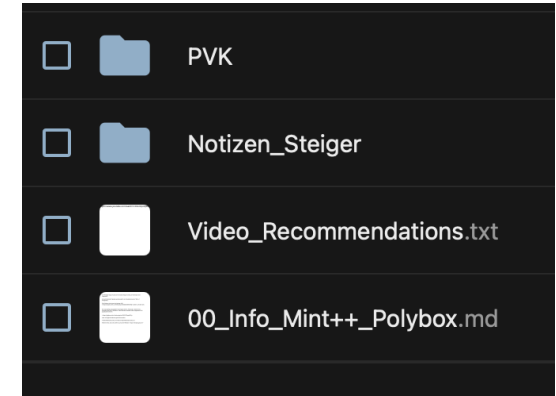
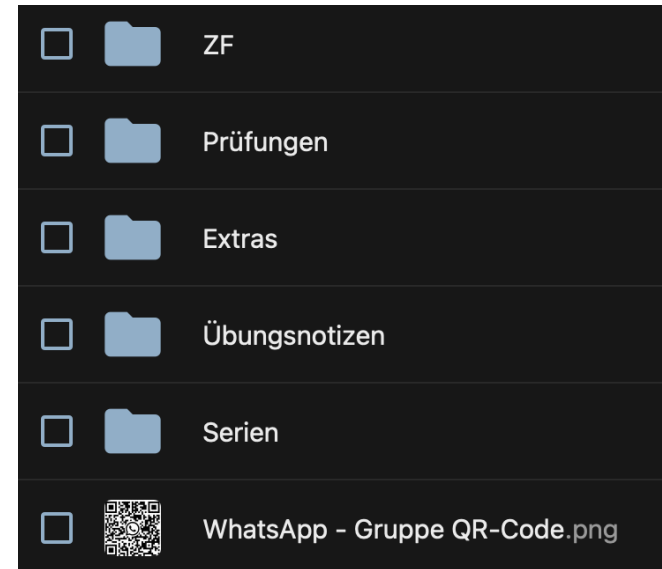
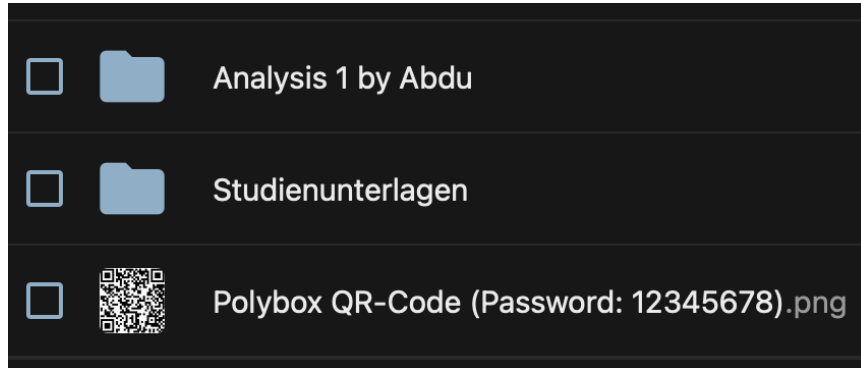


WhatsApp Gruppe



Polybox Passwort: 12345678

Polybox



WhatsApp Gruppe



Polybox Passwort: 12345678

Organizational Info

Während der Semesterzeit

- Jeden Montag eine neue Serie
- Deadline jeden Dienstag (nicht obligatorisch)
- Bonus und Stack-Aufgaben
- Bonus ist wichtig
- Stack im Web > in der App

Prüfungsinfo

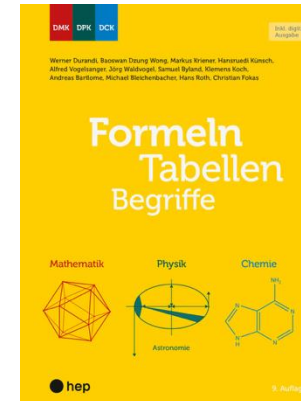
- 120 minutes for 120 Points => polybox
- Schriftlich + am Computer
- 80 Punkten MC, SC
- 40 Punkten 2 offene Aufgaben
- 2 A4 Blätter beidseitig oder 4 Blätter einseitig => polybox
- FoTaBe + Wörterbuch



WhatsApp Gruppe



Polybox Passwort: 12345678



Aufbau Übungsstunde

10:15



Teil I : Theorie, Beispiele, Menti, Quiz & alte Prüfungsaufgaben

11:00



Teil II : Open Room - Serien lösen, Fragen klären, Zum Mittagessen oder Nach Hause gehen

12:00



WhatsApp Gruppe



Polybox Passwort: 12345678

Aufbau Übungsstunde

12:15



Teil I : Theorie, Beispiele, Menti, Quiz & alte Prüfungsaufgaben

13:00



Teil II : Open Room - Serien lösen, Fragen klären, Zum Mittagessen oder Nach Hause gehen

14:00



WhatsApp Gruppe



Polybox Passwort: 12345678

Heute

- Theorie & Beispiele
- Bonus Topic: Tipps for Semester 1 + ETH
- Open Room: Fragen



WhatsApp Gruppe



Polybox Passwort: 12345678

Tipps

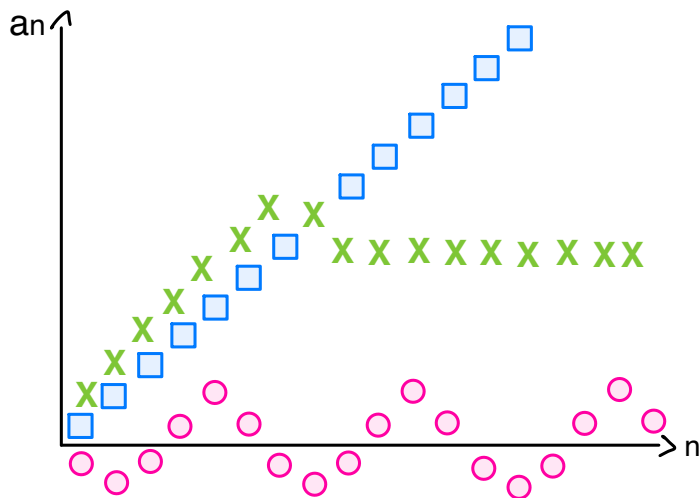
- **Analysis 1:** Übungen + Serien, ZF während des Semesters, StackBonus
- **Mechanik 1:** Das schwierigste Fach. Alle Vorlesungen Übungen + Serien.
- **Chemie:** Norris ist sehr net. Bonuspunkte. Die Vorlesungen + ZF
- **Informatik 1:** Gleich schwierig wie Mech 1 & Gleichen Tipps wie für Mech 1 + ZF
- **Lineare Algebra 1:** Die langweilste Vorlesungen der ETH. Übungen + ZF
- **EDMS:** Ist eigentlich sehr interessant, wird aber leider etwas schlecht unterrichtet. ZF
- **Allgemein :** Es gibt keine dumme Fragen, Kein Panik, dran bleiben, um Hilfe bitten.
ZF & TA



WhatsApp Gruppe



Polybox Passwort: 12345678

Analysis 1 - Übung 1Folgen an

□ divergent

x konvergent & beschränkt

○ divergent & beschränkt

Konvergent/Divergent

- Konvergent => besitzt einen Grenzwert => **Beschränkt**
- Beschränkt & Monoton steigend/fallend => **Konvergent**
- Divergent falls nicht konvergent oder Nicht beschränkt => **Divergent**

Nullfolge

- Folge konvergiert gegen 0

Beschränkt

- Alle Glieder sind in einem endlich breiten, waagerechten Parallelstreifen enthalten.

Monoton wachsend/fallend

wachsend $a_{n+1} \geq a_n$ (strikt: $a_{n+1} > a_n$)

fallend $a_{n+1} \leq a_n$ (strikt: $a_{n+1} < a_n$)

Grenzwerte

Brüche mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$

• Grad (Zähler) > Grad (Nenner) : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 3n + 7}{n^2 - 2n} = \infty$

• Grad (Zähler) = Grad (Nenner) : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 3n}{4n^2} = \frac{7}{4}$

• Grad (Zähler) < Grad (Nenner) : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1n^5 - 4n}{6n^6 - 2} = 0$

Wurzeln

3. Binomische Formel

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \cdot \frac{(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)}{(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right]}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2} // \end{aligned}$$

Muss man gesehen haben:

- arithmetische Folge + Reihe

► Explizit: $a_n = a_1 + d(n - 1)$ Rekursiv: $a_n = a_{n-1} + d$

► $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{2} \cdot n[a_1 + a_n]$ oder $S_n = \frac{1}{2} \cdot n[2a_1 + d(n - 1)]$

Bsp.

$$4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 = ? \quad a_n = 4 + (n - 1) \cdot 4$$

$$\sum_{n=1}^6 a_n = \frac{6}{2} [4 + 24] = 3 \cdot 28 = 84 //$$

• geometrische Folge + Reihe

► **Explizit:** $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ **Rekursiv:** $a_n = a_{n-1} \cdot q$

►
$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^n) = a_1 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Bsp. $3 + 6 + 12 + 24 = 3 (1 + 2 + 4 + 8)$

$\rightarrow a_1 = 3 \quad q = 2 \quad n = 4$

$$a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 3 \cdot \frac{1 - 2^4}{1 - 2} = 3 \cdot \frac{1 - 16}{-1} = 3 \cdot 15 = 45 //$$

►
$$S_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1(1 + q + q^2 + \dots) = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q}, \text{ falls } |q| < 1$$

Bsp.

$$3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \dots = 3(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots)$$

$\rightarrow a_1 = 3 \quad q = \frac{1}{2}$ merke/prüfe $|q| = 1/2 < 1$ ✓

$$3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 3 \cdot 2 = 6 //$$

• harmonische Reihe

►
$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \infty$$

•
$$S_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}; \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e$$

•
$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Serie 1

Abgabetermin für alle Aufgaben: Dienstag, um 14:00 Uhr, online

Bemerkung: Wir haben einige Aufgaben in den Serien gekennzeichnet: Mit einem Stern (★) sind Aufgaben gekennzeichnet, die über den Prüfungsstoff hinausgehen, aber dennoch interessant sind. Mit einem Herz (♥) sind die (Teil-) Aufgaben gekennzeichnet, die besonders wichtig sind. Um den Anschluss in der Vorlesung nicht zu verlieren, sollten Sie zumindest diese Aufgaben bearbeiten.

1. (♥) Wir werden dieses Semester viel rechnen. Beherrschen Sie die wichtigsten algebraischen Umformungen noch? Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$. Vereinfachen Sie soweit wie möglich (ohne Taschenrechner!).

(a) $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ 3. Binomische Formel nutzen, dafür Nenner erweitern

(b) $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ 3. Binomische Formel nutzen, dafür Zähler umschreiben

(c) $\frac{a-b}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$ $\Rightarrow$ Erweitern um die Brüche im Nenner zu eliminieren

(d) Für $a \neq 8$: $\frac{3a+a^2}{a-8} - \frac{2a-2}{8+a} + (64-a^2)^{-1} \cdot (a^3+a^2+42a+31 \cdot 2^4) \Rightarrow$ Einheitlichen Nenner erstellen

(e) Für $a, b \neq 0$: $\ln(ab) + \ln\left(\frac{a^2}{b}\right) - 2\ln(ab) \Rightarrow$ Log-Gesetze

(f) Für welches positive $a \in \mathbb{R}$ gilt $\log_a 5 = \frac{1}{2}$?

(g) Für welches $a \in \mathbb{R}$ gilt $7^{2a} = 2$?

2. In der ersten Vorlesung haben wir Folgen sowie ein paar Begriffe dazu kennengelernt. Diese sollten wir festigen. Untersuchen Sie zu diesem Zweck die nachstehenden Folgen. Sind sie beschränkt? Sind sie monoton? Konvergieren sie? Wenn ja: Was ist ihr Grenzwert?

(a) (♥) $a_n = \cos \frac{\pi n}{3}$. $\Rightarrow$ Kurve vorstellen (GeoGebra)

(b) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2}$. $\Rightarrow$ An Reihe der natürlichen Zahlen erinnern

(c) (♥) $a_n = \frac{3n^4-5n^2+2}{7n^4-4n^3}$. $\Rightarrow$ Trick mit teilen durch höchste Potenz

(d) (♥) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ für $n \geq 3$. $\Rightarrow$ Muss ich selbst probieren

(e) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. $\Rightarrow$ Wurzeltrick

(f) $a_n = \sqrt{(n+1)n} - n$. $\Rightarrow$ Wurzeltrick

3. Eine wichtige und sehr klassische Folge ist die **Fibonacci-Folge**: Es sei die Folge (a_n) gegeben durch das rekursive Gesetz

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es den Grenzwert der Folge $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, wobei $n \geq 1$, zu bestimmen. Die Teilaufgaben werden hier nach und nach schwieriger, Teil (e) ist schon ordentlich zum Knobeln!

- (a) (♥) Begründen Sie, wieso die Folge (a_n) monoton wachsend ist und wieso die Folge (b_n) beschränkt ist. $\Rightarrow a_n$ genau anschauen für was es definiert ist

a_n in b_n Gleichung einsetzen

- (b) Es sei $\Rightarrow$ an einsetzen und ausmultiplizieren

$$c_n = a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3.$$

Zeigen Sie, dass $c_n = -c_{n-1}$ für alle $n \geq 4$.

- (c) Begründen Sie, dass $c_n = (-1)^{n+1}$ gilt. $\Rightarrow$ Folgenglieder anschauen

- (d) Verwenden Sie jeweils Teilaufgabe c) um zu zeigen, dass die Folge (b_{2n}) , wobei $n \geq 1$, monoton fallend ist und dass die Folge (b_{2n+1}) , wobei $n \geq 1$, monoton wachsend ist. $\Rightarrow$ Muss ich selbst anschauen

- (e) (★) Begründen Sie unter Zuhilfenahme der vorangehenden Teilaufgabe, dass die Folge (b_n) gegen den goldenen Schnitt $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.

$\hookrightarrow$ Muss ich selbst anschauen, aber geht über Prüfung hinaus