

Analysis 1 - Übung 14



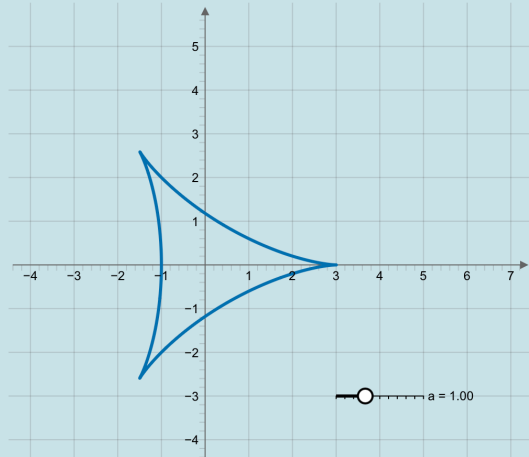
BP Sommer 2025

Offene Aufgabe 1

Für einen Parameter $a > 0$ sei die Kurve K durch die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2a \cos(t) + a \cos(2t) \\ 2a \sin(t) - a \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

gegeben.



- Man bestimme die Krümmung von K im Kurvenpunkt mit Parameterwert $t = \pi$ in Abhängigkeit von a .
- Man bestimme die Bogenlänge von K für das Intervall $t \in [0, \pi/3]$ in Abhängigkeit von a . Man verwende dazu (ohne Beweis) die Umformungen

$$\cos(t) \cos(2t) - \sin(t) \sin(2t) = \cos(3t),$$

$$1 - \cos(nt) = 2 \sin^2\left(\frac{nt}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Krümmung $k(t)$

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

Bogenlänge

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$\begin{aligned} \text{a. } \dot{x}(t) &= -2a(\sin(t) + \sin(2t)) \\ \ddot{x}(t) &= -2a(\cos(t) + 2\cos(2t)) \\ \dot{y}(t) &= 2a(\cos(t) - \cos(2t)) \\ \ddot{y}(t) &= -2a(\sin(t) - 2\sin(2t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(\pi) &= 0 \\ \ddot{x}(\pi) &= -2a \\ \dot{y}(\pi) &= -4a \\ \ddot{y}(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

$$k(\pi) = -\frac{8a^2}{(16a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{8a}$$

$$\text{b. } S = \int_0^{\pi/3} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$\dot{x}^2(t) = 4a^2(\sin(t) + \sin(2t))^2$$

$$\dot{y}^2(t) = 4a^2(\cos(t) - \cos(2t))^2$$

$$4a^2 (\sin^2 t + 2 \sin t \sin 2t + \sin^2 2t + \cos^2 t - 2 \cos t \cos 2t + \cos^2 2t)$$

$$4a^2(2 + 2\sin(t)\sin(2t) - 2\cos(t)\cos(2t)) = 8a^2(1 - \cos(3t))$$

$$= 8a^2 \cdot 2 \sin^2\left(\frac{3}{2}t\right) = 16a^2 \sin^2\left(\frac{3}{2}t\right)$$

$$S = 4a \int_0^{\pi/3} \left| \sin\left(\frac{3}{2}t\right) \right| dt = \frac{8}{3}a$$

Offene Aufgabe 2

a. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 5. Ordnung der Funktion

$$x \mapsto \int_0^x \ln(1+t^2) dt$$

entwickelt um $x_0 = 0$.

b. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 5. Ordnung der Funktion

$$x \mapsto \int_0^x \ln(4+t^2) dt$$

entwickelt um $x_0 = 0$. Verwenden Sie dazu Ihr Resultat aus Teilaufgabe a.

Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$a. \quad \ln(1+t^2) = t^2 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^6 - \dots$$

$$P_5(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{10}x^5$$

$$b. \quad \ln(4+t^2) = \ln(4) + \ln\left(\frac{4+t^2}{4}\right) = \ln(4) + \ln\left(1 + \left(\frac{t}{2}\right)^2\right)$$

$$\ln(4+t^2) = \ln(4) + \left(\frac{t}{2}\right)^2 - \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^4}{2} + \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^6}{3} - \dots$$

$$P_5(x) = \ln(4)x + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{160}x^5$$

Es sei bekannt: Die komplexe Zahl $z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{3+i\pi}{16}}$ ist eine Lösung der Gleichung $z^n = 16 \cdot i$ für eine noch unbekannte natürliche Zahl n .

a. Man bestimme die natürliche Zahl n so, dass z_1 die Gleichung $z^n = 16 \cdot i$ löst.

$$n = 8$$

b. Man bestimme eine Lösung der Gleichung $z^n = 16 \cdot i$, die im 2. Quadranten liegt, und schreibe sie in Polarform:

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot \exp\left(\frac{15\pi}{16}i\right)$$

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

$$z^n = 16 \quad z_1 = \sqrt{2}$$

$$z = 16^{\frac{1}{n}}$$

$$a. \quad \left[\begin{array}{l} |z_1| = \sqrt{2} \\ |16 \cdot i| = 16 \end{array} \right] \quad \sqrt{2} = 16^{\frac{1}{n}} \rightarrow n = 8$$

$$b. \quad |z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \arg(z_2) \leq \pi \quad e^{-\frac{3}{16}i\pi + \frac{1}{4}i\pi k} = e^{\arg(z_2)i}$$

$$\arg(z_2) = \frac{13}{16}\pi$$

Für einen Parameter $a \in \mathbb{R}$ sei das Polynom f_a definiert durch

$$f_a(x) = -4ax^3 - 6x^2 - 24a^2x - a.$$

a. Man bestimme die Ableitung von f_a :

$$f'_a(x) = -12ax^2 - 12x - 24a^2$$

b. Man bestimme dasjenige $a \in \mathbb{R}$, für welches die Steigung von f_a an der Stelle $x_0 = -2$ maximal ist:

$$a = -1$$

$$a. \quad f'_a(x) = -4 \cdot 3ax^2 - 6 \cdot 2x - 24a^2 = -12ax^2 - 12x - 24a^2$$

$$b. \quad f'_a(x) = -12ax^2 - 12x - 24a^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 12 \cdot 24a^3}}{-24a} = -2 \quad = \quad -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\dots}}{\dots}$$

$$x_1 = -\frac{1 + \sqrt{1 - 8 \cdot a^3}}{2a} = -2$$

$$\rightarrow a = -1$$

Für die beiden Funktionen $g(x) = \frac{1}{\sin x}$ und $f(x) = \frac{1}{x^{3/7}}$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty.$$

Die beiden Funktionen wachsen aber nicht mit der gleichen Größenordnung, es gilt $f(x) = o(g(x))$ wenn $x \rightarrow 0^+$.

Dies ändert sich, wenn man Potenzen von f betrachtet. Man bestimme die kleinstmögliche natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $(f(x))^n \neq o(g(x))$ gilt, wenn $x \rightarrow 0^+$:

$$n = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(f(x))^n}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x^{n \cdot 3/7}} \neq 0 \quad \rightarrow n \geq \frac{7}{3} \Rightarrow n = 3$$

$$n \cdot \frac{3}{7} = 1$$

$$n = \frac{7}{3}$$

Man bestimme den Wert des Integrals $\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} x\sqrt{1-3x^2} dx$ durch Substitution. Geben Sie dazu die Substitution an:

- Verwendete Substitution: $u = 1 - 3x^2$
- Dann gilt für das Differential: $du = -6x dx$
- Schliesslich berechne man das transformierte Integral und das Resultat:

$$\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} x\sqrt{1-3x^2} dx = \int_1^{\frac{2}{3}} \frac{-1}{6} u^{\frac{1}{2}} du = \left[\frac{2}{9} - \frac{1}{8\sqrt{3}} \right]$$

$$u = 1 - 3x^2$$

$$du = -6x dx$$

$$-\frac{du}{6x} = dx$$

$$u = 1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^2 = 1 - 3 \cdot \frac{1}{4 \cdot 3} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$u = 1 - 3 \cdot 0 = 1$$

$$\int_1^{\frac{3}{4}} x\sqrt{u} \cdot -\frac{1}{6x} du = \frac{1}{6} \int_{\frac{3}{4}}^1 u^{\frac{1}{2}} du = \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{8\sqrt{3}} \right]$$

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}} - 1$ für $x \geq 0$.

- a. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von f :

$$f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{y+1} - \frac{1}{2}}$$

- b. Der Graph von f schliesst mit den positiven x - und y -Achsen eine Fläche ein. Bestimmen Sie eine Integralformel für das Volumen V des Rotationskörpers dieser Fläche bei Rotation um die y -Achse und berechnen Sie es:

$$V = \int_0^1 \pi \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{2} \right) dy = \pi \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right)$$

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \pi \cdot f^2(x) dx$$

$$y = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}} - 1$$

$$\rightarrow y + 1 = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}} \rightarrow x^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{y+1} \rightarrow x^2 = \frac{1}{y+1} - \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{y+1} - \frac{1}{2}}$$

$$f(x)_{max} = 1 \quad f(x)_{min} = 0$$

$$V = \int_0^1 \pi \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{2} \right) dy = \pi \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right)$$

Welche Aussage über die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^5 - 5x$ ist richtig?

☒ f ist monoton wachsend

☐

☒ f ist ungerade

☐

☒ f ist injektiv

☐

☒ f besitzt in $x_0 = 1$ eine globale Minimalstelle

☐

$$f(x) = x(x^4 - 5) \quad - f(-x) = x^5 - 5x$$

$f(x) = -f(-x)$: **ungerade**

Injektiv - Jeder Horizontale schneidet den Graphen höchstens einmal

Wir betrachten stetige Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

☒ Für jede solche Funktion f gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$

☐

☒ Für jede solche Funktion f gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$

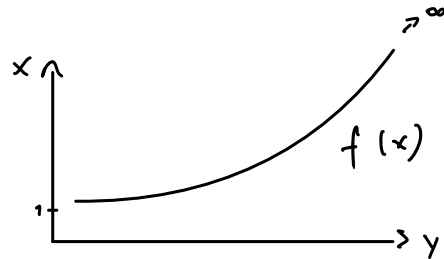
☐

☒ Für jede solche Funktion f gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$

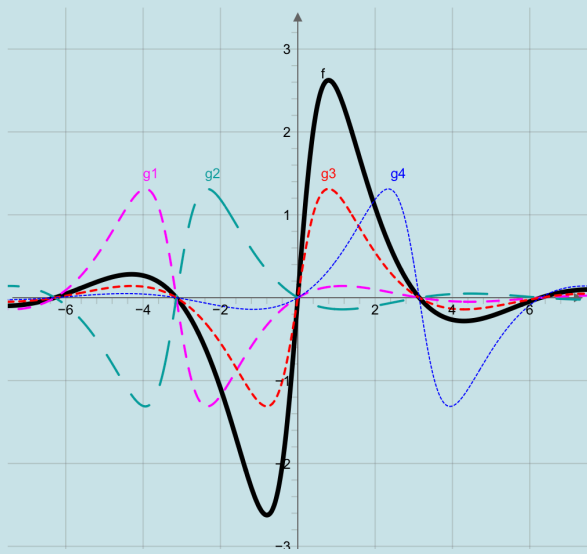
☐

☒ Für jede solche Funktion f gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 10^{2025}$

☐



Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = \frac{6 \sin x}{x^2 + 1}$ gegeben. Welche der untenstehenden Graphen entspricht der Funktion $g(x) = \frac{-3 \sin(x+\pi)}{(x+\pi)^2 + 1}$?



☒ g1: Pink, gestrichelt

☐

☐ g2: Grün-blau, weit gestrichelt

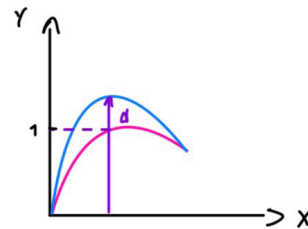
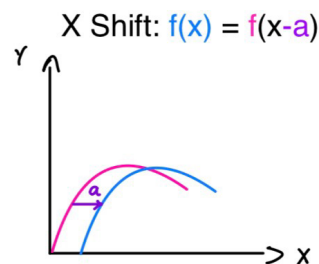
☐

☐ g3: rot, eng gestrichelt

☐

☐ g4: blau, fein gestrichelt / gepunktet

☐



$|d| > 1$ Strecken
 $|d| < 1$ Stauchen
 $d < 0$ Spiegeln bei X

Strecken/Stauchen entlang Y:

$$f(x) = d \cdot f(x)$$

Man bestimme eine Asymptote der Funktion $f(x) = \cosh(x) - \sinh(x)$ wenn $x \rightarrow \infty$.

☒ $x \mapsto e^{2x}$

☐

☒ $x \mapsto e^x$

☐

☒ $x \mapsto \frac{e^x}{2}$

☐

☒ $x \mapsto e^{-x}$

☐

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = e^{-x}$$

Seien P, Q und R Polynome mit reellen Koeffizienten, so dass $P(x) = Q(x) \cdot R(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Ausserdem sei P vom Grad 7 und Q vom Grad 4. Von den folgenden vier Aussagen ist genau eine immer wahr, die anderen können je nach P, Q, R auch falsch sein. Welche Aussage ist immer wahr?

☒ Falls Q keine reelle Nullstelle hat, dann hat P mindestens drei reelle Nullstellen	\$
☒ Die Anzahl nicht-reeller Nullstellen von Q muss gerade sein	\$
☒ P und R müssen die gleiche Anzahl nicht-reeller Nullstellen haben	\$
☒ R hat immer eine nicht-reelle Nullstelle	\$

Seien $m < n$ zwei positive ganze Zahlen. Wir definieren $f(x) = x^m$ und $g(x) = x^n$, wobei $x > 0$ eine Messgrösse mit absolutem Messfehler dx sei. Man vergleiche die relativen Fehler von f und g : Welcher Fehler ist grösser?

☒ $\frac{df}{f} < \frac{dg}{g}$	\$
☒ Das hängt vom gemessenen x ab.	\$
☒ $\frac{df}{f} > \frac{dg}{g}$	\$
☒ $\frac{df}{f} = \frac{dg}{g}$	\$

Gegeben seien zwei Potenzreihen $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ mit Konvergenzradius A und $\sum_{n=0}^\infty b_n x^n$ mit Konvergenzradius $B \neq A$, beide entwickelt um $x_0 = 0$.

Welchen Konvergenzradius hat dann die Summe der Potenzreihen $\sum_{n=0}^\infty (a_n + b_n) x^n$ entwickelt um $x_0 = 0$?

☐ Der Durchschnitt von A und B	\$
☐ Die Summe von A und B	\$
☒ Das Minimum von A und B	\$
☐ Das Maximum von A und B	\$

Die Kurve K mit Endpunkten A und B sei gegeben durch die Parametrisierung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ mit $t \in [t_A, t_B]$.

Man bestimme eine Formel für den eingezeichneten Flächeninhalt F .

☐ $F = \frac{1}{2} \int_{t_A}^{t_B} y(t)\dot{x}(t) - x(t)\dot{y}(t) dt$	\$
☒ $F = \int_{t_A}^{t_B} x(t)\dot{y}(t) dt$	\$
☒ $F = \int_{t_A}^{t_B} y(t)\dot{x}(t) dt$	\$
☐ $F = \frac{1}{2} \int_{t_A}^{t_B} x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t) dt$	\$

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

- Hat genau n Nullstellen (reell & komplex zusammen)
- Komplexe Nullstellen kommen immer im komplex konjugiertem Paar vor.

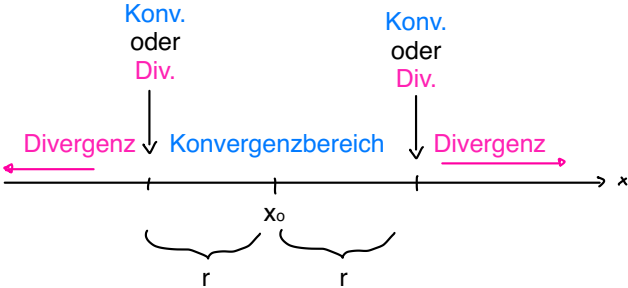
$$\# P = 7$$

$$\# Q = 4 \qquad \# R = 3$$

$$\frac{df}{f} = \frac{f' \cdot x}{f}$$

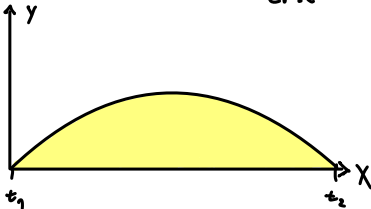
$$\frac{m \times x^n}{x^m} = m < n = \frac{n \times x^n}{x^n}$$

Konvergenzradius



- Parametrisierungen $\vec{r} = (x(t), y(t))^T$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \underbrace{\dot{x}(t) dt}_{dx}$$



Man bestimme den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos^2(x) dx$.

☐ $\frac{3\pi}{16}$

☐

☐ $\frac{\pi}{8}$

☐

☐ $\frac{\pi}{4}$

☐

☒ $\frac{\pi}{16}$

☐

$$\int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \sin^2(2x) dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{8} \sin^2(u) du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \pi = \frac{1}{16} \pi$$

$$2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x)$$

$$\frac{1}{4} \cdot u \sin^2(x) \cos^2(x) = \frac{1}{4} \sin^2(2x)$$

$$\begin{aligned} 2x &= u & \rightarrow & 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi = u \\ 2dx &= du & & 2 \cdot 0 = 0 = u \\ dx &= \frac{1}{2} du \end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral $\int_{2\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$...

☐ ... konvergiert und hat einen Wert < 0

☐

☐ ... divergiert

☐

☒ ... konvergiert und hat einen Wert > 0

☐

☐ ... konvergiert und hat den Wert $= 0$

☐

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx \quad \alpha > 1$$

$$|\sin x| \leq 1$$

$$\int_{2\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \dots$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{>0}$

Prüfungsvorbereitung

Lernphase ([Excel Planung](#))

- Social Media
- Übungen + Serien
- Alte Prüfungen lösen ([Polybox + Moodle](#))

Prüfungsphase

- "Nicht- Prüfungstage"
- Prüfungstag
- Prüfung ([Was? Wenn?](#))

Tipps Serie 14

1. • Kinetische Energie: Entweder differentiell $dT = 1/2 v^2 dm$ oder direkt $T = 1/2 \omega^2 \Theta$
 - Skizze machen, um Trägheitsmoment oder dm zu bestimmen
 - Formel für Trägheitsmoment (Flächendichte berücksichtigen!):
 - $\Theta_y = \int \rho x^2 G(x) dx$
 - Was ist die Formel für die Ausdehnung $G(x)$? Lineare Funktion!
 - Symmetrien bei Integralen ausnutzen
2. • Rotationskörper! D.h. Trägheitsmoment gegeben als $\Theta_x = \int_a^b (\pi \rho / 2 \cdot (f(x))^4) dx$
 - «Problem»: Kurve nicht als $y = f(x)$ sondern in Parameterdarstellung $y(t), x(t)$ gegeben. Mithilfe Additionstheoremen so umformen, dass y als Funktion von x dargestellt werden kann $\rightarrow y = f(x)$!
3. • Flächenträgheitsmoment, d.h. $J_y = \int_a^b (x^2 \cdot G(x)) dx$
 - Was ist die Ausdehnung $G(x)$? Achtung, sie verändert sich an einem Punkt, wenn die Figur einen «Knick» macht.
 - Symmetrien ausnutzen! Erinnere Kreisgleichung $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
4. b) Substitution $u = \exp(x)$ für's Integrieren
c) Substitution $u = \sqrt{x}$ für's Integrieren. B-H Regel anwenden