

Analysis 1 - Übung 13

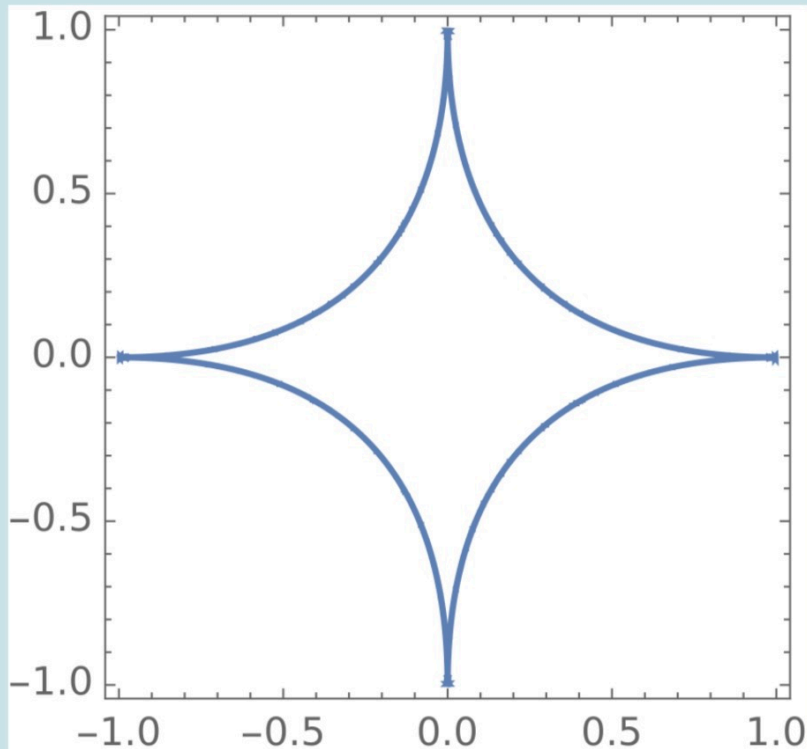


Aufgabe 4

Ziel: Flächenformel für ebene Kurven üben, Übergang implizite Form $\rightarrow$ Parameterdarstellung, Symmetrien erkennen und verwenden

Berechnen Sie die Fläche F des durch die ebene Kurve $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$ begrenzten Bereichs.

Hinweis: Verwenden Sie Symmetrien!



Lösung:

Wegen der Spiegelungssymmetrie an der x - und y -Achse gilt $F = 4A$, wobei F die Fläche der Figur ist und A die Fläche der Figur im ersten Quadranten ist. Eine im ersten Quadranten gültige Parametrisierung der Kurve ist durch $t \mapsto (\cos^4(t), \sin^4(t))$ mit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gegeben. Mit der Formel für Flächen unter parametrisierten Kurven gilt dann:

$$A = - \int_0^{\pi/2} \sin^4(t) \cdot \left(\frac{d}{dt} \cos^4(t) \right) dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sin^5(t) \cos^3(t) dt$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \sin^5(t) (1 - \sin^2(t)) \cos(t) dt$$

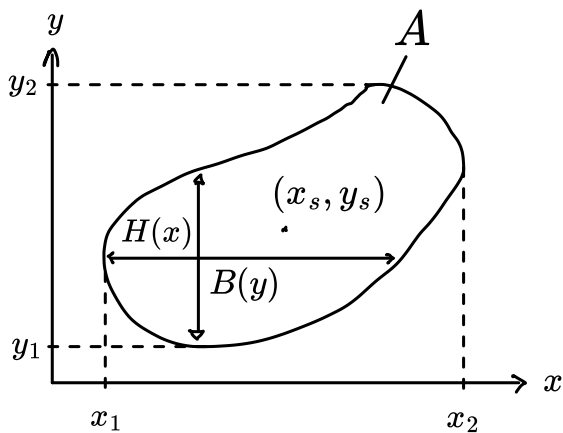
$$= 4 \int_0^{\pi/2} \sin^5(t) \cos(t) dt - 4 \int_0^{\pi/2} \sin^7(t) \cos(t) dt$$

$$= 4 \left[\frac{1}{6} \sin^6(t) \right]_0^{\pi/2} - 4 \left[\frac{1}{8} \sin^8(t) \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{4}{6} - \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$$

Also ist $F = 4A = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Flächenschwerpunkt

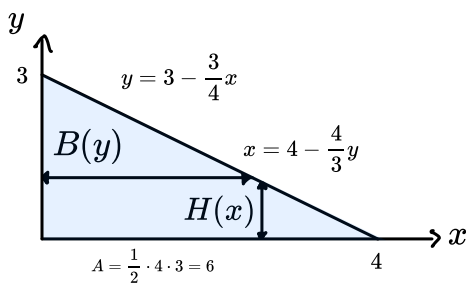


$$x_s = \frac{1}{A} \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \underbrace{H(x) dx}_{dA}$$

$$y_s = \frac{1}{A} \int_{y_1}^{y_2} y \cdot \underbrace{B(y) dy}_{dA}$$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} H(x) dx = \int_{y_1}^{y_2} B(y) dy$$

Bsp.



$$y_s = \frac{1}{A} \int_{y_1}^{y_2} y \cdot B(y) dy = \frac{1}{6} \int_0^3 y \cdot (4 - \frac{4}{3}y) dy = 1 //$$

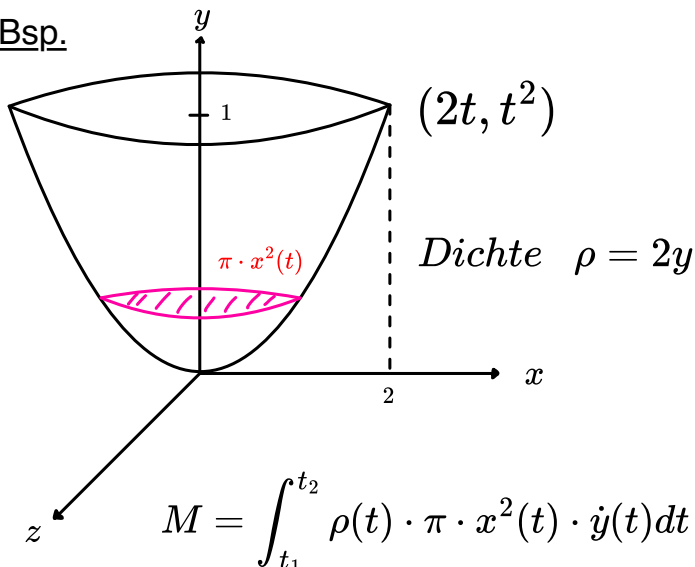
$$x_s = \frac{1}{A} \int_{x_1}^{x_2} x \cdot H(x) dx = \frac{1}{6} \int_0^4 x \cdot (3 - \frac{3}{4}x) dx = \frac{4}{3} //$$

Massenschwerpunkt

Massenelement Dichte Volumenelement

$$x_s = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} x \cdot dm = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \rho \cdot dV \quad ; \quad M = \int_V \rho \cdot dV$$

Bsp.



$$x_s = 0$$

$$z_s = 0$$

Aus Symmetriegründe

$$y_s = \frac{1}{M} \int_{y_1}^{y_2} y \cdot \rho \cdot dV \quad t \in [0, 1]$$

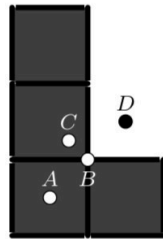
$$= \frac{1}{M} \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \rho(t) \cdot \underbrace{\pi \cdot x^2(t)}_{\text{Kreis}} \cdot \underbrace{y'(t) dt}_{\text{Volumenelement}}_{\text{Massenelement}}$$

$$M = \int_0^1 2t^2 \cdot \pi \cdot (2t)^2 \cdot 2t \, dt = \dots = \frac{8\pi}{3} //$$

$$y_s = \frac{3}{8\pi} \int_0^1 t^2 \cdot 2t^2 \cdot \pi (2t)^2 \cdot 2t \, dt = \dots = \frac{3}{4} //$$

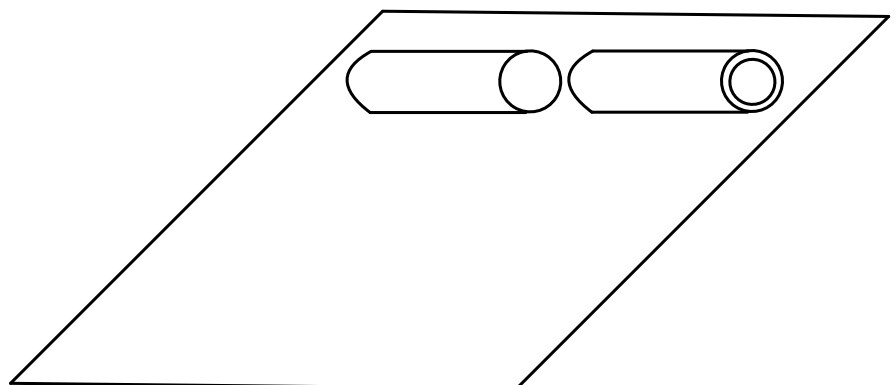
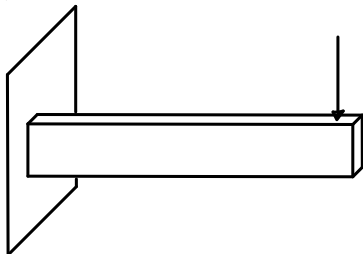
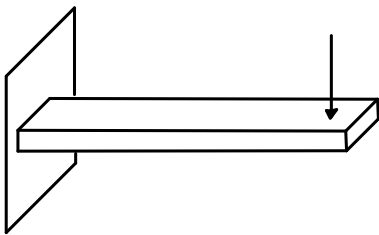
Bsp. BP Sommer 2018 SC

19. (Schwerpunkt SC) Gegeben sei der folgende Tetrisstein (*outverse J*):



An welcher Position liegt der Schwerpunkt?

- (a) Position A
- (b) Position B.
- (c) Position C.
- (d) Position D.





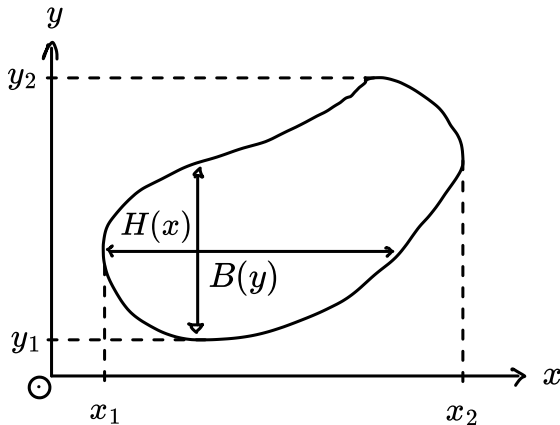
Rollende Massen

Trägheitsmoment



Flächen- & Massenträgheitsmoment

σ = Flächendichte [kg/m^2]



$$I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot \sigma(x) \cdot H(x) dx$$

$$I_x = \int_{y_1}^{y_2} y^2 \cdot \sigma(y) \cdot B(y) dy$$

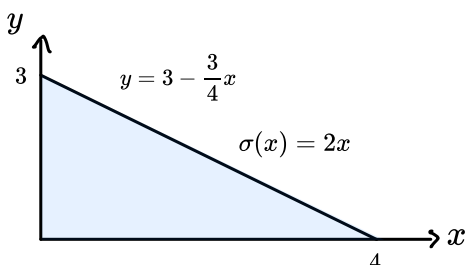
→ Falls die Flächendichte nicht gegeben ist oder Fläche "homogen"

→ die Flächendichte = 1 => Flächenträgheitsmoment

Polares Flächenträgheitsmoment

$$I_0 = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dm$$

Bsp.



Ges: Kinetische Energie wenn die Fläche mit Winkelgeschwindigkeit w um die y-Achse rotiert.

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \longleftrightarrow E_{kin} = \frac{1}{2} I_y \cdot w^2$$

$$I_y = \int_0^4 x^2 \cdot \sigma(x) \cdot H(x) \cdot dx = \int_0^4 x^2 \cdot 2x \cdot (3 - \frac{3}{4}x) dx = \dots = \frac{384}{5} //$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} I_y \cdot \omega^2 = \frac{192}{5} \omega^2 //$$

Fläche: $A = \int_{x_1}^{x_2} H(x) dx$

Masse: $M = \int_{x_1}^{x_2} \sigma(x) \cdot H(x) dx$

Schwerpunkt: $x_s = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \sigma(x) \cdot H(x) dx$

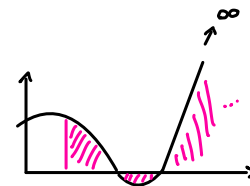
Trägheitsmoment: $I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot \sigma(x) \cdot H(x) dx$

Uneigentliche Integrale

3 Fälle

1) Integrationsgrenzen an Polstelle

(1. Gattung)



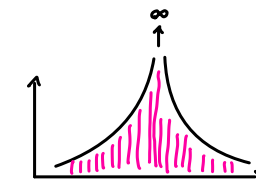
2) Eine oder beide Grenzen bei ∞

(2. Gattung)

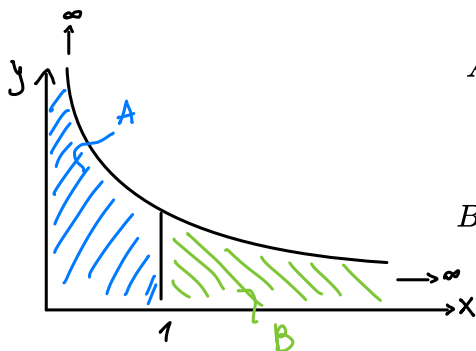


3) Integral über Definitionslücke

—> Integral aufsplitten



Bsp.



$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \int_{\xi}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} [2x^{1/2}]_{\xi}^1 = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\xi}) = 2 //$$

$$B = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_1^{\xi} x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} [2x^{1/2}]_1^{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} (2\sqrt{\xi} - 2) = \infty \text{ !}$$

—> Grenzwert existiert nicht
=> uneigentliches Integral existiert nicht.

Merke:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx \text{ existiert/konvergiert} \iff \alpha > 1$$

Tipps Serie 13

1. Diese Aufgabe ist relativ schwierig. Die Idee ist, das Volumen über ein Integral in die «Hoch»-Richtung (d.h.) zu bestimmen, also: $V = \int F(z) dz$
 - Dabei ist $F(z)$ die Querschnittsfläche dieses gesuchten Volumens bei einer gewissen Höhe z
 - Aus der 1. Skizze lässt sich erahnen, dass diese Fläche $F(z)$ die Form eines Rhombus hat! Der Winkel α bleibt hierbei konstant, egal auf welcher «Ebene» wir das Volumen schneiden. Geometrie $F_R = a(z) \cdot b(z)$ die Fläche eines Rhombus ist das Produkt der Seitenlänge $a(z)$ und der «Senkrechte» $b(z)$. Welcher Zusammenhang herrscht zwischen $a(z)$, α und $b(z)$?
 - Welcher Zusammenhang herrscht zwischen $b(z)$, r und z ?
D.h. finde den expliziten Funktionsausdruck für $b(z)$ mit Variable z .
 - Jetzt hast du die Funktion $F(z)$ vollständig beschrieben:
Sie hängt nur noch von α , $b(z)$ ab und $b(z)$ hast du im vorherigen Schritt bestimmt!
 - Jetzt integrieren über die Variable z . Was sind die Grenzen?
2. Symmetrien ausnutzen und als erstes einen Ausdruck für den Radius R herleiten (der ist nicht gegeben!)
 - Gesamtvolumen des Körpers berechnen. Zwei verschiedene Rotationskörper!
 - Was ist die «Querschnittsfläche» $F(x)$? Da Rotationskörper, sind das Kreisflächen mit $F(x) = \pi \cdot r(x)^2$.
Der Radius hängt beim ersten Teil von der x -Koordinate ab, beim zweiten Abschnitt ist er konstant
3. Ganz normal Oberflächenformel anwenden. Symmetrie nutzen!
4. Ganz normal Oberflächenformel anwenden.
Erinnere Hauptsatz der Infinitesimalrechnung(Übung 10)