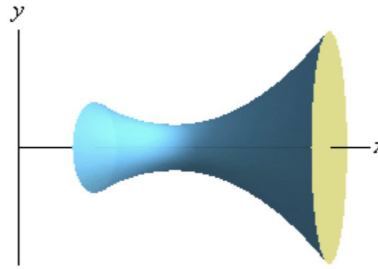


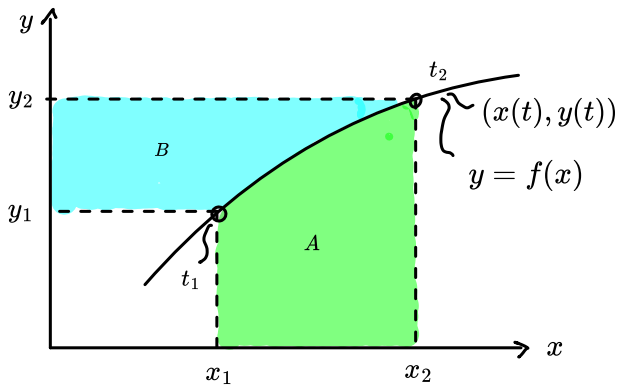
Analysis 1 - Übung 12



Anwendung der Integralrechnung



TRIGGERED



$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \underbrace{\dot{x}(t) dt}_{= dx}$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) \Rightarrow dx = \dot{x}(t) dt$$

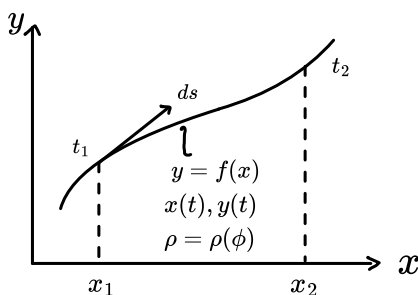
$$B = \int_{y_1}^{y_2} f^{-1}(y) dy = \int_{x_1}^{x_2} x \cdot f'(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot \underbrace{\dot{y}(t) dt}_{= dy}$$

$$y = f(x)$$

$$x = f^{-1}(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow dy = f'(x) dx$$

Bogenlänge



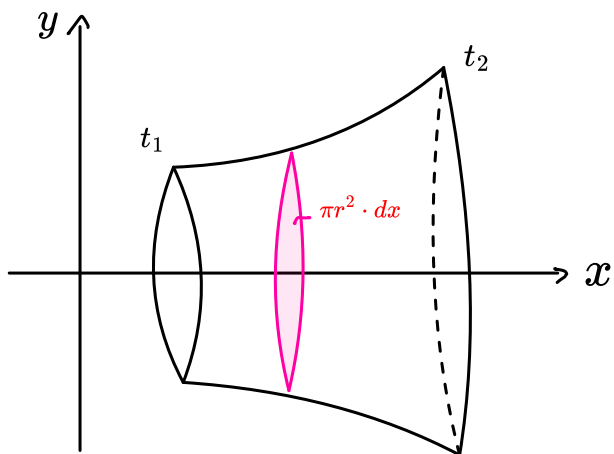
$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \rightarrow \left| \begin{pmatrix} 1 \\ f' \end{pmatrix} \right|$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \rightarrow \left| \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \right|$$

$$= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2} d\phi \rightarrow \left| \begin{pmatrix} \rho(\phi) \cos(\phi) \\ \rho(\phi) \sin(\phi) \end{pmatrix} \right|$$

Rotationsvolumen

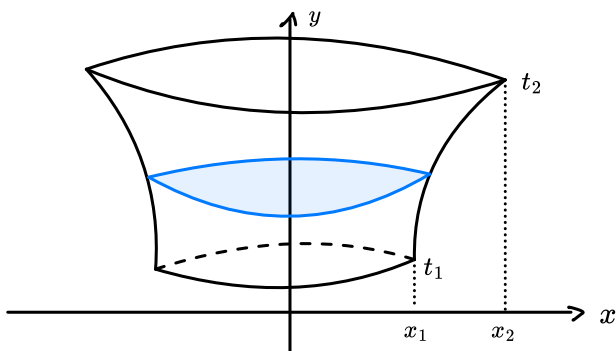
- Rotation um x – Achse



$$V = \int_{t_1}^{t_2} \pi \cdot y^2(t) \cdot \underbrace{\dot{x}(t)dt}_{= dx}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \pi \cdot f^2(x) dx$$

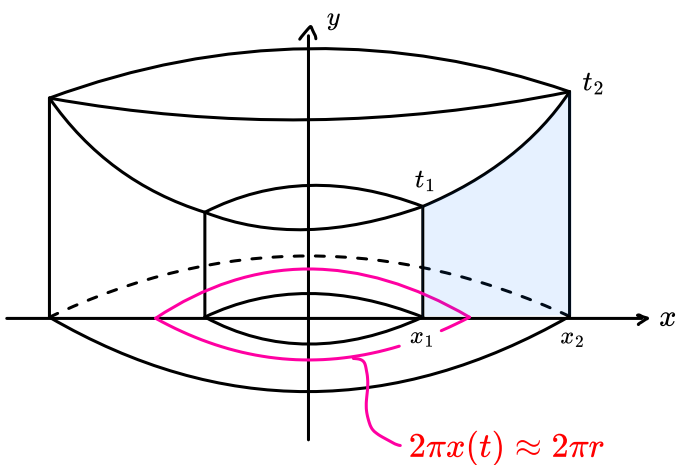
- Rotation um y – Achse



$$V = \int_{t_1}^{t_2} \pi \cdot x^2(t) \cdot \underbrace{\dot{y}(t)dt}_{= dy}$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} \pi x^2 \cdot \underbrace{f'(y)dy}_{= dy}$$

- Fläche rotiert um y – Achse

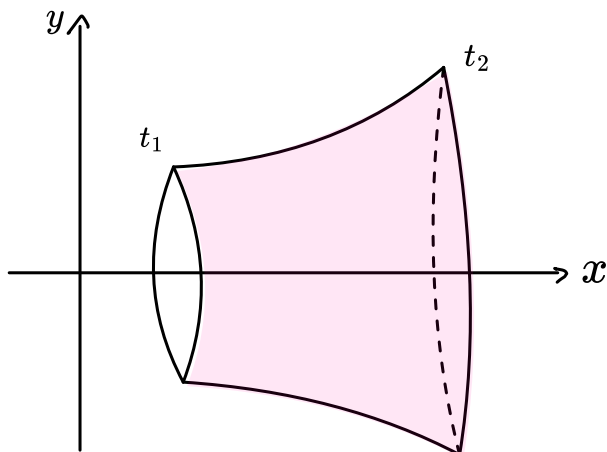


$$V = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{2\pi x(t)}_{\text{Umfang}} \underbrace{y(t)}_{\text{Höhe}} \underbrace{\dot{x}(t)dt}_{dx}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x(t) \cdot f(x) dx$$

Oberfläche von Rotationskörper

- Rotation um x – Achse

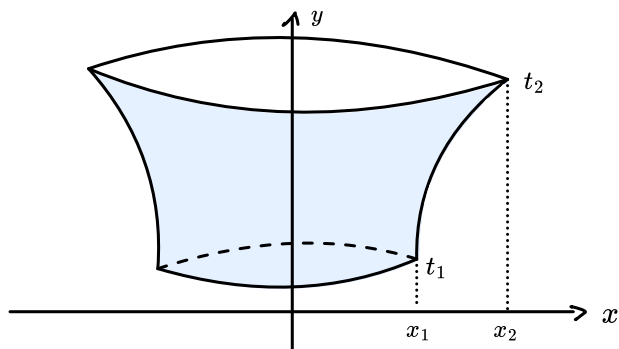


$$O = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi y(t) \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}_{ds} dt$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Nicht: $O = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi y(t) \cdot \dot{x}(t) dt$ (Schreiben)

- Rotation um y – Achse

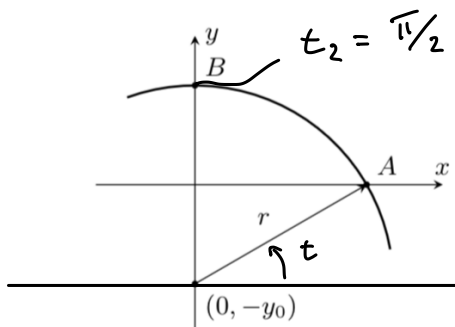


$$A = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi x(t) \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}_{ds} dt$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Bsp. BP Sommer 2021 SC

Frage 13 (III) Sei K ein Kreis mit Radius r und Mittelpunkt $(0, -y_0)$, wobei $0 \leq y_0 < r$. Seien A und B die Punkte, wo der Kreis die positiven x - bzw y -Halbachsen schneidet, wie in der Abbildung. Welche Formel ergibt die Oberfläche der Schale, die entsteht, wenn man das Kurvenstück zwischen A und B um die y -Achse rotiert?



☒ **A** $O = 2\pi \int_0^{\sqrt{r^2 + y_0^2}} \sqrt{r^2 - x^2} dx$

☒ **C** $O = 2\pi \int_{\arcsin(\frac{y_0}{r})}^{\pi/2} (r \cos \varphi) r d\varphi$

☐ **B** $O = 2\pi \int_0^{\pi/2} |r^2 \cos \varphi| d\varphi$

☐ **D** $O = 2\pi \int_{\frac{y_0}{r}}^{\pi/2} (r \cos \varphi) r d\varphi$

Kreis parametrisiert:

$$x(t) = x_0 + r \cos(t)$$

$$y(t) = y_0 + r \sin(t)$$

$$x(t) = r \cos(t)$$

$$y(t) = -y_0 + r \sin(t)$$

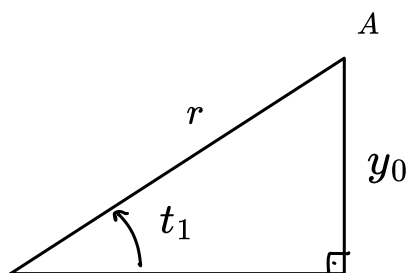
$$A = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi x(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

$$O = \int_{\arcsin(\frac{y_0}{r})}^{\pi/2} 2\pi \cdot (r \cdot \cos(t)) \cdot r dt$$

$$\dot{x}(t) = -r \sin(t)$$

$$\dot{y}(t) = r \cos(t)$$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)} = \sqrt{r^2} = r$$



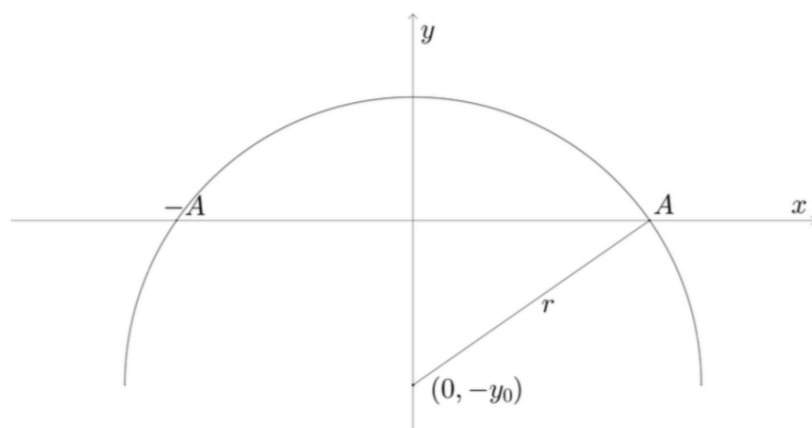
$$\sin(t_1) = \frac{y_0}{r}$$

$$t_1 = \arcsin\left(\frac{y_0}{r}\right)$$

$$t \in \left[\arcsin\left(\frac{y_0}{r}\right), \frac{\pi}{2}\right]$$

Bsp. BP Sommer 2019 SC

24. (III) Sei K ein Kreis von Radius r und Mittelpunkt $(0, -y_0)$, $0 \leq y_0 < r$. Seien A und $-A$ die Punkte, wo der Kreis die x -Achse schneidet, wie in der Figur. Welche Formel gibt die Oberfläche des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man das Kurvenstück zwischen A und $-A$ um die x -Achse rotiert?



(a)

$$O = 2\pi \int_{\frac{y_0}{r}}^{\frac{y_0}{r} + \frac{\pi}{2}} (-y_0 + r \sin \varphi) r d\varphi.$$

✓ (b)

$$O = 2\pi \int_{\arcsin(\frac{y_0}{r})}^{\pi - \arcsin(\frac{y_0}{r})} (-y_0 + r \sin \varphi) r d\varphi.$$

(c)

$$O = \int_{-\sqrt{r^2 + y_0^2}}^{\sqrt{r^2 + y_0^2}} \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

(d)

$$O = 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} r \sin \varphi \sqrt{r^2} d\varphi.$$

1. Sektorfläche Formel in Polarkoordinaten nutzen(Übung 11)

c) $|\sin(x)|^2 = \sin^2(x)$

2. a) Am besten Formel für die Sektorfläche benutzen.

Entweder: Symmetrie nutzen und nur Sektorfläche von einem "Blatt" berechnen (d.h z.B. Intervall $[-\pi/4, \pi/4]$).

Oder: ohne Symmetrie direkt Intervall $[0, 2\pi]$

b) Breite b dort, wo die Kurve im Intervall $[0, \pi/4]$, bzw. $[-\pi/4, 0]$ eine horizontale Tangente hat. Wandle in kartesisch um: $x(\varphi) = \rho \cdot \cos(\varphi)$; $y(\varphi) = \rho \cdot \sin(\varphi)$.

Wir wissen für horizontale Tangente muss $dy/dt = 0$ & $dx/dt \neq 0$.

Hilfreiche Additionstheoreme: $\sin(2x) = 2 \sin(x)\cos(x)$; $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x)$.

Sobald man den Winkel φ hat, der zum Punkt mit der horizontalen Tangente zeigt, kann man den dazugehörigen Radius $\rho(\varphi)$ berechnen und mit Trigonometrie b bestimmen.

3. Erinnere: Hauptsatz der Infinitesimalrechnung(Übung 10): $F(t) = \int_a^t f(u) du \rightarrow F' = f(t)$
Vertikale Tangente heisst: $dx/dt = 0$ & $dy/dt \neq 0$. Erinnere: $a \cdot \cos^2(x) + a \cdot \sin^2(x) = a$

4. Symmetrie brauchen: Fläche vierteln.

Entweder direkt mit gegebenem Ausdruck: $f(x) = y = (1 - \sqrt{x})^2 \rightarrow \int f(x) dx$

Oder mit einer geeigneten Parametrisierung für die Kurve:

Welche Parametrisierung könnte das sein? Denke an trigonometrische Funktionen, für die gilt, dass $a(t) + b(t) = 1 \rightarrow \sqrt{a(t)^2} + \sqrt{b(t)^2} = 1$