

Analysis 1 - Übung 11Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

“Taylorentwicklung von f(x) um den Punkt x_0 ”

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Cosinus- & Sinus Integrale

Für $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 2$, gelten:

$$\int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) dx$$

$$\int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) dx$$

Integration durch Substitution

- Braucht Gefühl/Übung
- Tabellen
- “Das was kompliziert ist substituieren”
- dx & Grenzen anpassen!

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5} dx$$



Bsp

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$$

$$u = x^2 + 2$$

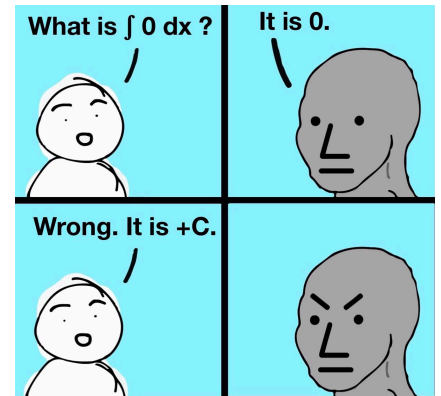
$$1du = 2x dx$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

$$= \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{u}} \frac{du}{\cancel{2x}} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = u^{\frac{1}{2}} + C = \underline{\underline{(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} + C}}$$

↑
Kein x mehr vorhanden!

Rücksubstituieren



Bsp

$$\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx$$

$$x = 3 \sin(u)$$

→

$$1dx = 3 \cos(u) du$$

$$u = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\text{Obere Grenze: } u(x=3) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Untere Grenze: } u(x=0) = \arcsin(0) = 0$$

$$\rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{9 - 9 \sin^2(u)}}_{\sqrt{9(1 - \sin^2(u))}} \cdot 3 \cdot \cos(u) du = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1 - \sin^2(u)}}_{\cos(u)} \cdot 3 \cdot \cos(u) du$$

Trick von oben

$$= 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du = 9 \cdot \frac{2-1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(u) du = 9 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 du = 9 \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{9\pi}{4}}}$$

$$\begin{aligned} n &= 2 \\ a &= 0 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Bsp

$$\int \frac{x+5}{x^2+5x^2+8x+4} dx = \int \frac{x+5}{(x+1)(x+2)^2} dx$$

Partialbruchzerlegung

Ansatz

$$\frac{x+5}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+2)^2} \quad || \cdot (x+1)(x+2)^2$$

$$x+5 = A(x+2)^2 + B(x+1)(x+2) + C(x+1)$$

$$x+5 = A(x^2+4x+4) + B(x^2+3x+2) + C(x+1)$$

$$x+5 = (A+B) \cdot x^2 + (4A+3B+C) \cdot x + (4A+2B+C)$$

Koeffizientenvergleich

$$\begin{array}{lcl} x^2: & \left| \begin{array}{l} 0 = A + B \\ 1 = 4A + 3B + C \\ 5 = 4A + 2B + C \end{array} \right| & \begin{array}{l} \longrightarrow \boxed{A = -B} \\ \longrightarrow 1 = 16 - 12 + C \\ \longrightarrow \boxed{C = -3} \end{array} \\ x^1: & & \\ x^0: & & \end{array}$$

$$\underline{-4 = 0 + 1B + 0} \longrightarrow \boxed{B = -4}$$

$$\boxed{\frac{x+5}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{4}{(x+1)} + \frac{-4}{(x+2)} + \frac{-3}{(x+2)^2}}$$

$$\int \frac{x+5}{(x+1)(x+2)^2} dx = \int \frac{4}{(x+1)} dx - \int \frac{4}{(x+2)} dx - \int \frac{3}{(x+2)^2} dx$$

$$= 4 \ln(x+1) - 4 \cdot \ln(x+2) + 3(x+2)^{-1} + C //$$

Partielle Integration

$$G'(x) = g(x) \text{ und } F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^b \underset{\downarrow}{G} \cdot \underset{\uparrow}{f} dx = G \cdot F \Big|_a^b - \int_a^b g \cdot F dx$$

Bsp.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx = [x \cdot (-\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot (\cos(x)) dx$$

$$= + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1 //$$

Bsp.

$$\int x \ln(x^2) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x^2) - \int \left(\frac{x^2}{2} \right) \cdot \left(\frac{2x}{x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x^2) - \frac{x^2}{2} + C //$$

Auf dem Weihnachtsmarkt gönnten sich Professor Steiger, Abdu, Martin und Santiago je einen heissen Punsch – allerdings in sehr unterschiedlichen Mengen:

Steiger: 3 Becher

Abdu: 4 Becher

Martin: 7 Becher

Santiago: 6 Becher

Frage:

Wie viele Becher trank jede Person im Durchschnitt?

$$B_4 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$$

Arithmetisches Mittel: $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n a_i$

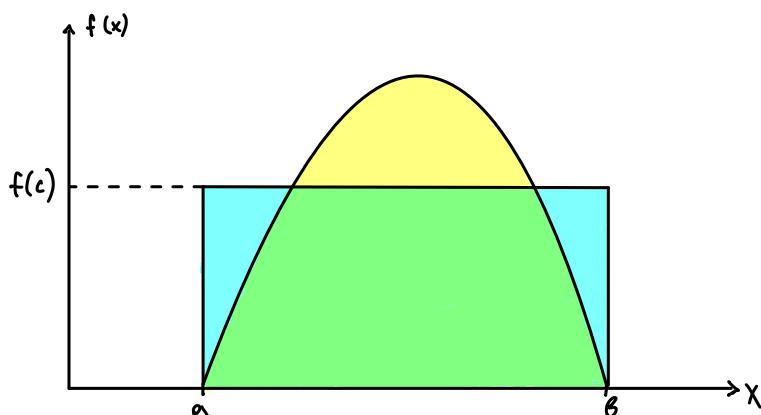
Wie kann man die durchschnittliche Temperatur eines letzten Bechers bestimmen, wenn Martin ihn während 10 Minuten nicht angerührt hat und die Temperatur durch eine Funktion $f(x)$ beschrieben wird?

$$f_{avg} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Wenn eine Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ stetig ist, dann gibt es mindestens einen Punkt $c \in [a, b]$, an dem die Funktion genau ihren Durchschnittswert auf diesem Intervall annimmt.

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c) \text{ mit } c \in (a, b)$$



Flächenberechnungen

- Parametrisierungen $\vec{r} = (x(t), y(t))^T$

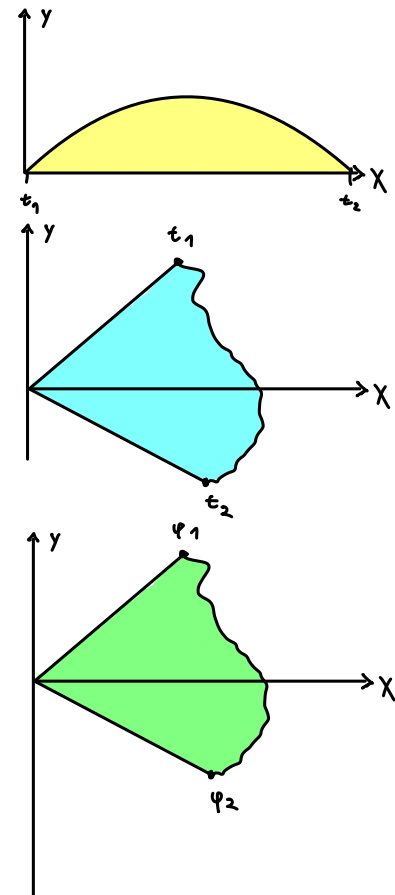
$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \dot{x}(t) dt$$

- Sektorfläche

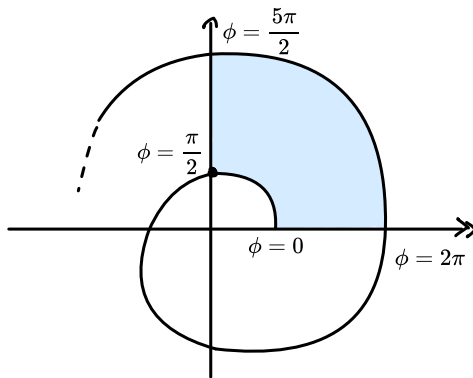
$$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x(t) \cdot \dot{y}(t) - y(t) \cdot \dot{x}(t)) dt$$

- Polarkoordinaten

$$A = \frac{1}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \rho^2(\phi) d\phi$$



Bsp. $\rho(\phi) = e^\phi$



$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} e^{2\phi} d\phi - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\phi} d\phi \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2\phi} \right]_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2\phi} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4} (e^{5\pi} - e^{4\pi} - e^{\pi} + 1) \end{aligned}$$

Tipps Serie 11

1. Bekannte Integrale nutzen => Substitution und partielle Integration (Photomath Check)
2. Symmetrie nutzen und nur die Fläche bestimmen => Gesamtfläche = 4 • Einzelfläche
3. • Schnittpunkte mit x-Achse finden
 - Symmetrie bei y-Achse nutzen => Beziehung zwischen a und b finden
4. Rekursionsformel finden => Potenzregeln: $n = 1 + (n - 1)$ => partiell integrieren
=> Rekursionsmuster $\ln = (n - 1)(\ln - 2 - \ln - 1)$ erkennen