

Analysis 1 - Übung 10



Aufgabe 3

Ziele: Kurven in Polarkoordinaten betrachten, Schnittpunkt und Tangenten bestimmen

Die beiden in Polarkoordinaten (r, φ) gegebenen Kurven

$$K_1 : r = \sin^2 \varphi$$

$$K_2 : r = \frac{1}{2} |\sin(2\varphi)|$$

schneiden sich für $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ in einem Punkt P .

- Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts P .
- Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t_1 im Punkt P an die Kurve K_1
- Bestimmen Sie von den folgenden 4 Punkten, ob sie auf der Tangente t_1 liegen:

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right), P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right), P_3 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 4\sqrt{2}\right), P_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\varphi = \phi$$

$$0 < \phi < \frac{\pi}{2} \rightarrow K_2 \geq 0$$

$$\text{a)} \quad \sin^2 \phi = \frac{1}{2} |\sin(2\phi)|$$

$$\sin^2 \phi = \frac{1}{2} (2 \sin \phi \cos \phi)$$

$$\sin^2 \phi = \sin \phi \cos \phi$$

$$\sin \phi = \cos \phi$$

$$\tan \phi = 1$$

$$\phi = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$r = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Polar } (r, \phi) : P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

Kartesisch (x, y) :

$$x = r \cos \phi = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$y = r \sin \phi = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{b)} \quad K_1 : r = \sin^2 \phi$$

Parametrische Gleichung:

$$r_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2 \phi \cos \phi \\ \sin^3 \phi \end{pmatrix}$$

$$\dot{r}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sin^2 \phi \cos \phi \\ \sin^3 \phi \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 \sin \phi \cos^2 \phi - \sin^2 \phi \sin \phi \\ 3 \sin^2 \phi \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\phi_0 = \frac{\pi}{4} : \quad t \rightarrow \underbrace{r_1(\phi_0) + t \dot{r}_1(\phi_0)}_{\text{Übung 8}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{4} + t \frac{\sqrt{2}}{4} \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{4} + t \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \text{c) } x = \frac{\sqrt{2}}{4} + t \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 3x = \frac{3\sqrt{2}}{4} + t \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{4} + t \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ (I) - (II) \end{array} \right.$$

$$3x - y = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \begin{array}{l} P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \quad \checkmark \\ P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \quad \times \\ P_3 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 4\sqrt{2} \right) \quad \checkmark \\ P_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \checkmark \end{array}$$

Normaleneinheitsvektor

$$\bar{n}_0 = \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

Partialbruchzerlegung Übung 7

Komplizierte polynomiale Brüche zu "einfache" Brüche umformen

gegeben ist ein polynomialer Bruch $p(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ Bsp. $p(x) = \frac{5x^2 + x}{x^3 + 2}$

- ① Falls $\text{Grad}(f(x)) \geq \text{Grad}(g(x))$ führe Polynomdivision
- ② Nenner $g(x)$ Faktorisieren
- ③ Ansatz ausschreiben
- ④ Koeffizienten Vergleich $\leadsto$ konstanten bestimmen

Ansätze

i) n-fache Nullstelle : $\frac{(...)}{(x - x_0)^n} = \frac{A}{(x - x_0)} + \frac{B}{(x - x_0)^2} + \dots + \frac{Z}{(x - x_0)^n}$

ii) komplexe Nullstelle : $\frac{(...)}{(x^2 + 1)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)}$
z.B. $\rightarrow$

Potenzreihen

Eine Potenzreihe ist eine ganz allgemeine unendliche Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

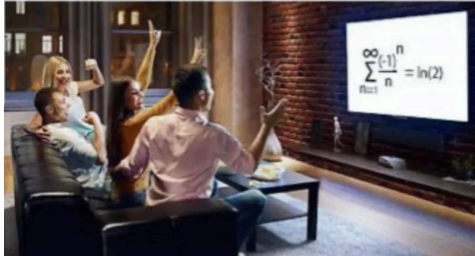
Spezielle Typen von Potenzreihe:

- Taylorreihen
- Maclaurinreihen
- Geometrische Reihe
- Exponentialreihe
- Laurentreihen
- Binomialreihe

Fourierreihen: Analysis 3, QM

Pade Approximation: Control Systems 1

A group of friends watching their favorite series:



Konvergenzradius

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

“Taylorentwicklung von f(x) um den Punkt x₀”

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

- Jede Taylorreihe ist eine Potenzreihe
- Nicht jede Potenzreihe ist eine Taylorreihe

Bsp. BP Winter 2017 Offen

7. [6 Punkte] Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f: x \mapsto \frac{4x - 5}{2x^2 - 5x + 3}$$

mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, sowie ihren Konvergenzradius. (Hinweis: Partialbruchzerlegung.)

$$\frac{4x - 5}{2x^2 - 5x + 3} = \frac{4x - 5}{(2x - 3)(x - 1)} = \frac{A}{(2x - 3)} + \frac{B}{(x - 1)} \quad \parallel \cdot (2x - 3)(x - 1)$$

$$4x - 5 = A(x - 1) + B(2x - 3)$$

$$\left[\begin{array}{l} x^0: \quad -5 = -A - 3B \\ x^1: \quad 4 = A + 2B \\ \quad \quad -1 = -B \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} B = 1 \\ A = 4 - 2B = 2 \end{array}$$

$$\frac{4x - 5}{(2x - 3)(x - 1)} = \frac{2}{(2x - 3)} + \frac{1}{(x - 1)}$$

$$\left[\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right]$$

$$\left[\frac{2}{2x-3} = \frac{\frac{2}{3}}{(\frac{2}{3}x)-1} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-(\frac{2}{3}x)} = -\frac{2}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}x\right)^n \right]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$$\left| \frac{2}{3}x \right| < 1$$

$$|x| < \frac{3}{2}$$

$$\frac{4x-5}{(2x-3)(x-1)} = \left[-\frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n x^n \right] - \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right]$$

$$= \left[-\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} x^n \right] - \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right]$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1 \right) \cdot x^n$$

a_n

Konvergenzradius

$$\sim \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1\right)}{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} + 1\right)} \right| = 1 //$$

Bsp. BP Sommer 2016 Offen

2. [6 Punkte] Man bestimme die ersten drei nicht-verschwindenden Terme der Taylorentwicklung von $f(x) = \tanh(x)$ in $x_0 = 0$.

FoTaBe s.60

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

FoTaBe s.79 oder ZF

$$\left[e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right] \rightarrow e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = e^{-x} \right]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+(-1)^{n+1}}{n!} \right) x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+(-1)^n}{n!} \right) x^n}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+(-1)^n}{n!} \right) x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+(-1)^{n+1}}{n!} \right) x^n$$

$$(\cancel{a_0} + a_1 x + \cancel{a_2} x^2 + a_3 x^3 + \cancel{a_4} x^4 + a_5 x^5 + \dots)$$

$$\cdot \left(2 + \frac{2}{2!} x^2 + \frac{2}{4!} x^4 + \frac{2}{6!} x^6 + \dots \right)$$

$$= \left(\frac{2}{1!} x + \frac{2}{3!} x^3 + \frac{2}{5!} x^5 + \frac{2}{7!} x^7 + \frac{2}{9!} x^9 + \dots \right)$$

Taylorreihen

Taylorentwicklung von $f(x)$ um x_0 :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

▷ ungerade Fkt $\Leftrightarrow$ ungerade Indizes: $a_1 x + a_3 x^3 + \dots$

▷ gerade Fkt $\Leftrightarrow$ gerade Indizes: $a_0 + a_2 x^2 + \dots$

Ableitung Un-/Gerader Funktionen

▷ $g(x)$ sei **gerade**

$$g'(0) = g^{(3)}(0) = g^{(5)}(0) = \dots = 0$$

▷ $f(x)$ sei **ungerade**

$$f''(0) = f^{(4)}(0) = f^{(6)}(0) = \dots = 0$$

nicht-verschwindenden Terme

$$\tanh(-x) = -\tanh(x)$$

$\rightarrow$ ungerade

$\rightarrow$ nur ungerade indices $\neq 0$

$$(a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \dots) \cdot \left(2 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{4!}x^4 + \frac{2}{6!}x^6 + \dots\right) = \left(2x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{2}{5!}x^5 + \frac{2}{7!}x^7 + \dots\right)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{lcl} x^0 : & 0 = 0 & \\ x^1 : & a_1 \cdot 2 = 2 \rightarrow & \boxed{a_1 = 1} \\ x^2 : & 0 = 0 & \\ x^3 : & 2a_3 + \frac{2}{2!}a_1 = \frac{2}{3!} \rightarrow & \boxed{a_3 = -\frac{1}{3}} \\ x^4 : & 0 = 0 & \\ x^5 : & a_1 \cdot \frac{2}{4!} + a_3 \cdot \frac{2}{2!} + 2a_5 = \frac{2}{5!} \rightarrow & \boxed{a_5 = \frac{2}{25}} \end{array}$$

$$\frac{2}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{2} + 2 \cdot a_5 = \frac{2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

Bsp. BP Sommer 2018 SC

20. (Taylorpolynom berechnen SC) Berechne für die Funktion $f(x) = \cos(x^2)$ den Wert $f^{(4)}(0)$, das heisst die vierte Ableitung an der Stelle 0.

- (a) $-1/2$.
 ✓(b) -12 .
 (c) 0.
 (d) 1.

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

FoTaBe oder ZF

• Potenzreihe = Taylorreihe

$$f(x) = \cos(x^2) \quad f^{(4)}(0) = ?$$

• Taylorentwicklung um x_0

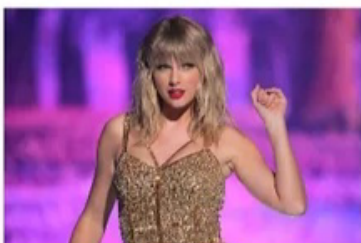
$$f(x) = f^{(0)}(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \underbrace{\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4}_{a_4} + \dots$$

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \dots = a_0 + a_4x^4 + a_8x^8$$

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -\frac{1}{2}$$

$$f^{(4)}(0) = -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot (4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1) = -12 //$$

THE TAYLOR I WANT



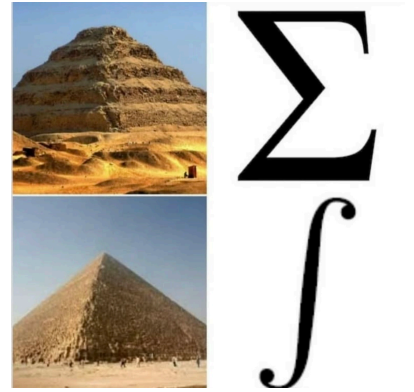
THE TAYLOR I GET

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

Gliederweise ableiten/integrieren

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos(x) = \sin'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$



Bsp.

$$\int_0^x \sqrt{1-t^3} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

Ges: $a_0, \dots, a_7$

→ Tabelle: $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \dots$

$$\sqrt{1+(-t^3)} = 1 - \frac{t^3}{2} - \frac{t^6}{8} - \dots$$

$$\int_0^x (1 - \frac{t^3}{2} - \frac{t^6}{8} - \dots) dt = \left[t - \frac{t^4}{8} - \frac{t^7}{56} - \dots \right]_0^x = x - \frac{x^4}{8} - \frac{x^7}{56} - \dots$$

$$\rightarrow a_0 = a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = 0$$

$$a_1 = 1 \quad a_4 = -\frac{1}{8} \quad a_7 = -\frac{1}{56} //$$

Integrale

$$\int g'(x) \cdot f(g(x)) dx = F(g(x)) + C$$

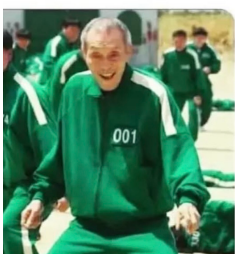
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + C$$

Must see:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{x^5} dx$$

$$\int \frac{1}{x^5 + 1} dx$$



Bsp.

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \sin(x^2) + C$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7} dx = \ln(x^2+3x+7) + C$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+1} dx = \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{3}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + 3 \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \int \frac{1}{a^2(1+(\frac{x}{a})^2)} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2} dx$$

Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Sei f stetig, $[a, b] \in \mathbb{D}(f)$ und

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Für jedes $x \in [a, b]$ gilt dann:

$$F'_a(x) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x)$$

Bsp. BP Winter 2020 SC

14. (III) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$F(x) = \int_0^{4x} \cos(t^3) dt$$

(a) $F'(x) = \cos(64x^3)$.

✓ (b) $F'(x) = 4 \cos(64x^3)$

(c) $F'(x) = -\int_0^{4x} 3t^2 \sin(t^3) dt$.

(d) $F'(x) = 4x \cos(x^3)$.

When you solve an integral but it took 4 variable substitutions



→ Substitution: $4n = t$ Obere Grenze: $4n = 4x \rightarrow n_u = x$
 $4dn = dt$ Untere Grenze: $4n = 0 \rightarrow n_u = 0$

$$F(x) = \int_0^x \cos(4^3 n^3) \cdot 4dn = \int_0^x 4 \cos(64n^3) dn$$

$$F'(x) = 4 \cos(64x^3)$$

Tipps Serie 10

1. a) $(\sinh(x))' = \cosh(x)$ $(\cosh(x))' = \sinh(x)$

$$\sinh(x = 0) = 0 \qquad \cosh(x = 0) = 1$$

b) Starte mit der Potenzreihe von $\ln(x + 1)$

2. Fange mit der Potenzreihe von $\exp(x)$ an. Dann gliederweise integrieren

3. • Partialbruchzerlegung (Übung 7)

- Überlege, um welchen Typ von Reihen es sich handelt.
- Versuche, aus dem Term mit der reellen Nullstelle den Faktor $(1+x)$ auszuklammern.
- Für welches n ist der Ausdruck konstant oder gleich 0?