

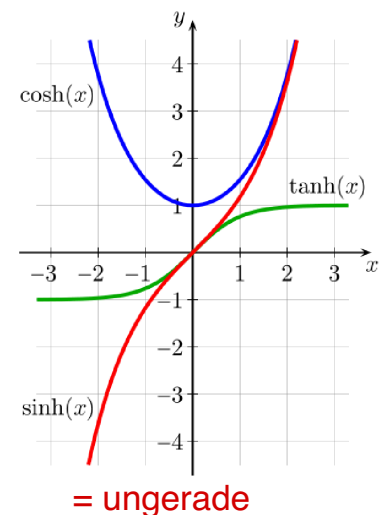
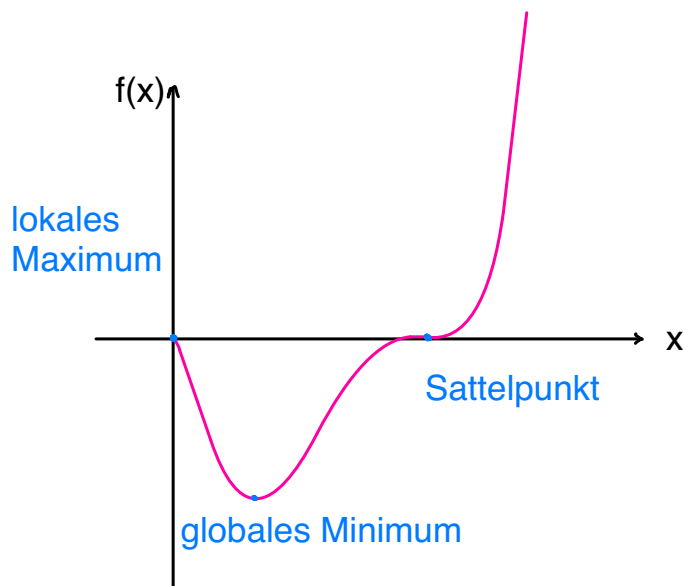
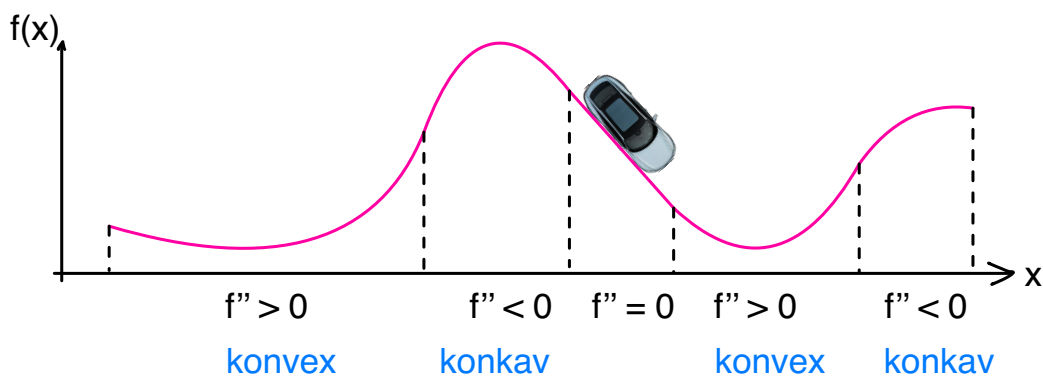
Analysis 1 - Übung 9



Recap:

- Ordne die folgende Funktion der Grösse nach (für $x \rightarrow \infty$):

$$f_1(x) = x^3 \quad f_2(x) = \ln(e^{x^4} - 2) \quad f_3(x) = \sqrt{x} \quad \ln(e^{x^4} - 2) > x^3 > \sqrt{x}$$

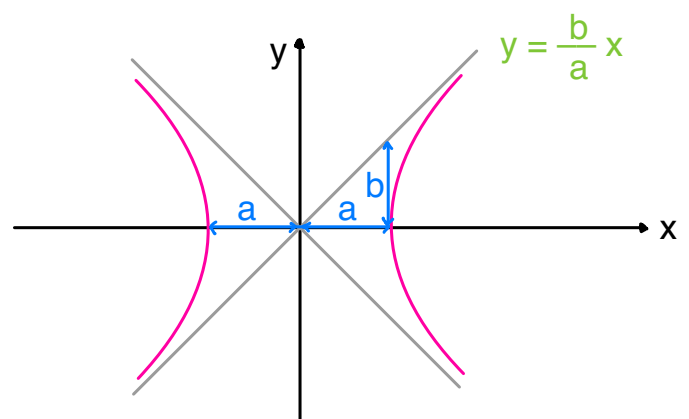


Hyperbel

Explizit: $f(x) = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$

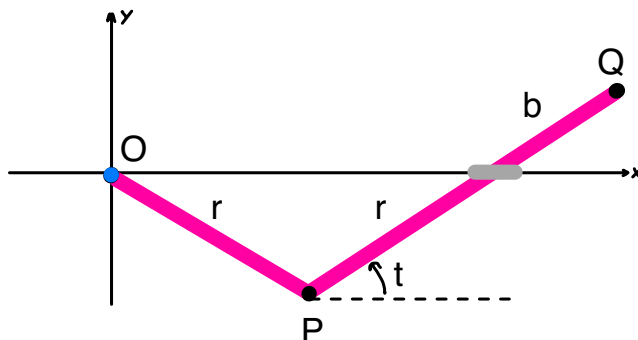
Implizit: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Parametrisiert: $x(t) = \pm a \cdot \cosh(t)$
 $y(t) = b \cdot \sinh(t)$



Bsp. Roboterarm

Der Stab **OP** mit der Länge **r** ist im Ursprung befestigt und mit einem weiteren Stab **PQ** der Länge **r + b** verbunden. Eine **Führung sorgt dafür**, dass ein Punkt des Stabes **PQ**, der sich im Abstand **r** von **P** befindet, **nur entlang der x-Achse gleiten kann**. Bestimme eine **Parametrisierung $\vec{s}(t)$** der möglichen Positionen von Q.



1. Die Kurve in Abschnitte teilen

$$\vec{s}(t) = \vec{OP}(t) + \vec{PQ}(t)$$

2. Suche alle möglichen Werte für den Winkel t und den Vektor jedes Abschnitts für die Winkel t.

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad \vec{OP}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \quad \vec{OP}(0) = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{OP}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{OP}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ -r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

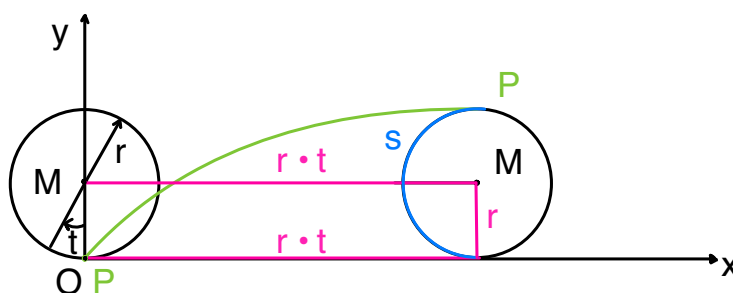
$$\vec{PQ}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(r+b) \end{pmatrix} \quad \vec{PQ}(0) = \begin{pmatrix} r+b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{PQ}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ r+b \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{PQ}(t) = \begin{pmatrix} (r+b) \cdot \cos(t) \\ (r+b) \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{s}(t) = \vec{OP}(t) + \vec{PQ}(t) = \begin{pmatrix} (2r+b) \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix}$$

Zykloide

$$\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP}$$

$$\rightarrow \vec{OM} = \begin{pmatrix} r \cdot t \\ r \end{pmatrix}$$



$$\rightarrow \vec{MP} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\left(-t - \frac{\pi}{2}\right) \\ r \cdot \sin\left(-t - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \sin(-t) \\ -r \cdot \cos(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin(t) \\ -r \cdot \cos(t) \end{pmatrix}$$

t im Uhrzeigersinn mit $t_0 = -\frac{\pi}{2}$

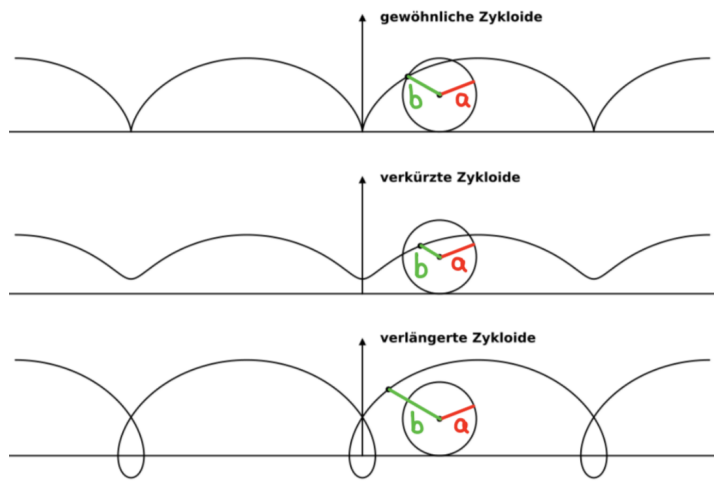
$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$$

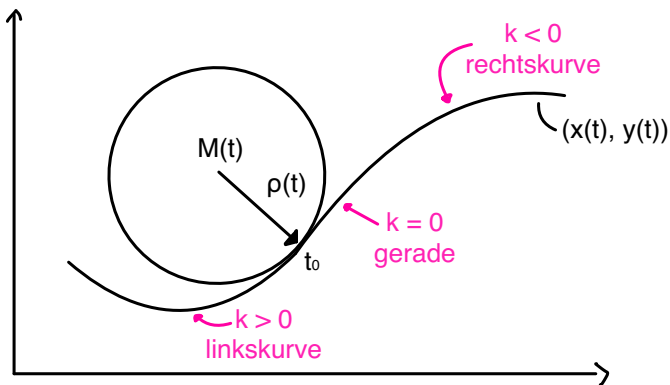
$$\sin(-x) = -\sin(x) = \text{ungerade}$$

$$\cos(-x) = \cos(x) = \text{gerade}$$

$$\rightarrow \vec{OP}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot t - r \cdot \sin(t) \\ r - r \cdot \cos(t) \end{pmatrix}$$



Krümmung



• $f''(x)$ gibt die **Krümmung** der Funktion $f(x)$

• Die Krümmung K einer Kurve gibt an, wie stark sich die Kurve an einer bestimmten Stelle biegt

Krümmung $k(t)$

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

Krümmungsradius $\rho(t)$

$$\rho(t) = \frac{1}{k(t)}$$

Evolute $r_E(t)$

Parametrisierung des Mittelpunktes des Krümmungskreise.

$$r_E(t) = \begin{pmatrix} x_E(t) \\ y_E(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \rho(t) \cdot \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} \quad \bar{n} = \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

$$x_E(t) = x(t) - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \dot{y}$$

$$y_E(t) = y(t) + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \dot{x}$$

Bsp

Geg: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \dot{x} = 2 & \ddot{x} = 0 \\ \dot{y} = 2t & \ddot{y} = 2 \end{matrix}$

Ges: a) $k(t)$

b) $k_{\text{MAX}}(t)$

c) Evolute

d) Parametrisierung des Mittelpunktes des Kreises mit konstantem Radius

$\rho_{\text{MIN}} = 1/k_{\text{MAX}}$ der auf der Kurve abrollt.

$$a) k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{2 \cdot 2 - 0 \cdot t}{(4 + 4t^2)^{3/2}} = \frac{1}{2(1 + t^2)^{3/2}} = k(t)$$

$$b) \dot{k}(t) = 0 = \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right) (1 + t^2)^{-5/2} (2t) = -\frac{3t}{2(1 + t^2)^{5/2}} = 0 \rightarrow t = 0 \quad k_{\text{MAX}} = \frac{1}{2}$$

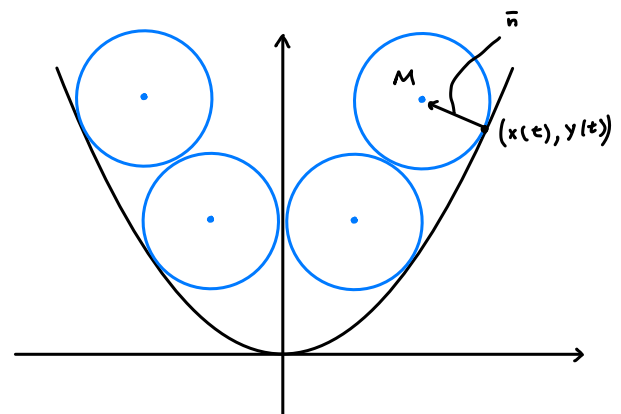
$$c) x_E(t) = x(t) - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \dot{y} = 2t - \frac{4 + 4t^2}{4} \cdot 2t = -2t^3 = x_E(t)$$

$$y_E(t) = y(t) + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \dot{x} = t^2 + \frac{4 + 4t^2}{4} \cdot 2 = 2 + 3t^2 = y_E(t)$$

$$d) \rho(t) = \frac{1}{k(t)} \rightarrow \rho_{\text{MIN}} = \frac{1}{k_{\text{MAX}}} = 2$$

$$\begin{pmatrix} x_M(t) \\ y_M(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \rho_{\text{MIN}} \cdot \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} \quad \bar{n} = \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$$



Zusammenfassende Übersicht

	Parameterdarstellung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$	Explizite Funktion $y = f(x)$	Polarkoordinaten $\rho(\varphi)$
Ortsvektor:	$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$	$\vec{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$	$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} \rho(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \\ \rho(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$
Tangentensteigung:	$\frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$	$\frac{f'(x_0)}{1}$	$\frac{\dot{y}(\varphi_0)}{\dot{x}(\varphi_0)}$
Tangentialvektor:	$\vec{t}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$	$\vec{t}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$	$\vec{t}(\varphi) = \begin{pmatrix} \dot{x}(\varphi) \\ \dot{y}(\varphi) \end{pmatrix}$
Normalenvektor:	$\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$	$\vec{n}(x) = \begin{pmatrix} -f'(x) \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{n}(\varphi) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(\varphi) \\ \dot{x}(\varphi) \end{pmatrix}$
Krümmung:	$k(t) = \frac{\dot{y}\ddot{x} - \ddot{y}\dot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$	$k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$	$k(\varphi) = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 + \rho\rho''}{(\rho^2 + (\rho')^2)^{3/2}}$
Krümmungsradius:	$\rho(t) = \frac{1}{k(t)}$	$\rho(x) = \frac{1}{k(x)}$	$\rho(\varphi) = \frac{1}{k(\varphi)}$
Evolute:	$\vec{E}(t) = \vec{r}(t) + \frac{\vec{n}_0(t)}{k(t)}$	$\vec{E}(x) = \vec{r}(x) + \frac{\vec{n}_0(x)}{k(x)}$	$\vec{E}(\varphi) = \vec{r}(\varphi) + \frac{\vec{n}_0(\varphi)}{k(\varphi)}$

$$x(\varphi) = \rho(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$$

$$y(\varphi) = \rho(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$$

Potenzreihen

Reihe: $s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots a_i \in R = s_{n-1} + a_n$

||
Glieder

Konvergenz: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$

Gilt nur in eine Richtung, ausser bei alternierenden Reihen
(Bsp. harmonische Reihe)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

“Potenzreihe der Funktion f(x) um den Punkt x_0 ”

Eine Potenzreihen ist eine **unendliche Reihe**, die man sich als einen “**unendlichen Polynom**” vorstellen kann. Sie konvergiert in einem bestimmten Intervall, dem **Konvergenzradius** und kann innerhalb dieses Intervalls wie eine ganz normale Funktion behandelt werden.

Bsp

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots \rightarrow \text{konvergiert für } |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x^2)^n = 1 - 2x^2 + 4x^4 + \dots \rightarrow \text{konvergiert für } |-2x^2| < 1 \text{ oder } |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{5-x} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{x}{5}} = \frac{1}{5} \frac{1}{1-\frac{x}{5}} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n \rightarrow \text{konvergiert für } \left|\frac{x}{5}\right| < 1 \text{ oder } |x| < 5$$

$$\frac{x^2}{5-x} = x^2 \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} x^{n+2} \rightarrow i = n+2 \rightarrow \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{i-1} x^i$$

$$\triangleright e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\triangleright \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\leadsto e^x + \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^n}{n!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] = \dots$$

$$\leadsto e^x \cdot \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \neq \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^n}{n!} \cdot (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$

Bsp. Bestimme die ersten vier Koeffizienten der Potenzreihe von $\frac{\sin(x)}{e^x}$ um des Zentrum $x_0 = 0$.

$$\frac{\sin(x)}{e^x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\sin(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) \cdot e^x$$

$$\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)$$

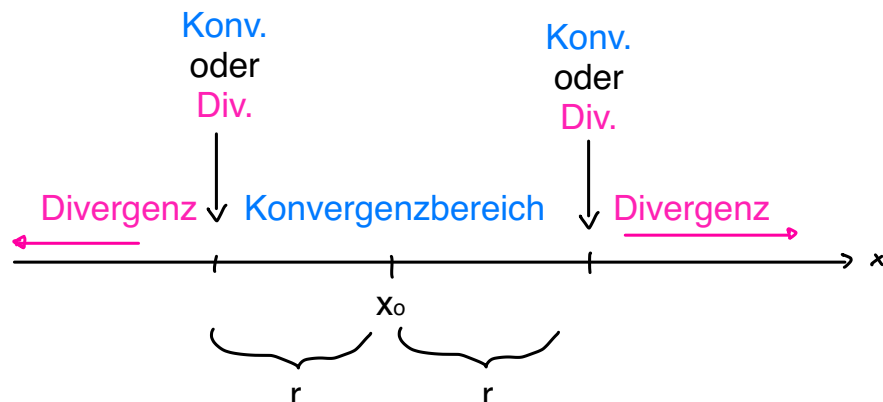
$$x^0 : 0 = a_0 \rightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$x^1 : 1 = a_0 + a_1 \rightarrow \boxed{a_1 = 1}$$

$$x^2 : 0 = a_0 \cdot \frac{1}{2!} + a_1 + a_2 \rightarrow \boxed{a_2 = -1}$$

$$x^3 : -\frac{1}{3!} = a_0 \cdot \frac{1}{3!} + a_1 \cdot \frac{1}{2!} + a_2 + a_3 \rightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{3}}$$

Konvergenzradius



$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Innerhalb des Konvergenzbereichs darf man die Potenzreihe gliedweise

- addieren/subtrahieren
- integrieren/differenzieren

Bsp.

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n$$

$$\leadsto r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n}{2^{n+1}} \right| = \frac{1}{2}$$

konvergiert für $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

oder $|x| < \frac{1}{2}$

$\leadsto$ Ränder müssen separat untersucht werden!

$$x = \frac{1}{2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty \quad \text{Divergenz}$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \sim \text{Divergenz}$$

konvergiert nicht für $|x| = \frac{1}{2}$

Tipps Serie 9

- Definition anwenden • $\overline{m}(t)$ ist normiert
- Denk an trigonometrische Beziehung (Additionstheoreme, Doppelwinkelformel)
 - Tangenten: Horizontal $\Rightarrow \dot{y}(t) = 0$, Vertikal $\Rightarrow \dot{x}(t) = 0$
 - a) ist bisschen lästig
 - b) Der analytische Weg ist sehr rechenintensiv (Stichwort: Korrekt zusammenfassen)
- Schnittpunkt heisst $r_1 = r_2 \Rightarrow$ Nach ϕ auflösen
 - Tangentengleichung bilden (c) implizite Form umstellen)