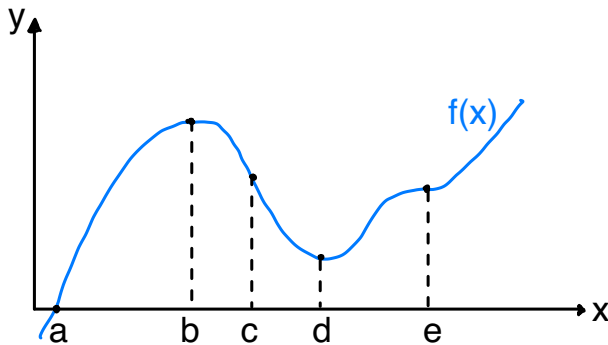


Analysis 1 - Übung 8



2. Ableitung



a: $f(a) = 0$

b: $f'(b) = 0$ $f''(b) < 0 \rightarrow$ lokales Maximum ↖ konvav

c: $f'(c) < 0$ $f''(c) = 0 \rightarrow$ Wendepunkt

d: $f'(d) = 0$ $f''(d) > 0 \rightarrow$ lokales Minimum ↖ konvex

e: $f'(e) = 0$ $f''(e) = 0 \rightarrow$ Sattelpunkt ↖ kein Extremum

$f'(x)$ gibt die **Steigung** der Funktion $f(x)$ $f''(x)$ gibt die **Krümmung** der Funktion $f(x)$

positive/negative Steigung = monoton **wachsend/fallend**

Kurve ist rechts gekrümmt (konvav)

Ebene Kurven

Explizite Darstellung: $f(x) = y = 5x - 2$

Nachteil: für X input gibt es nur Y output

Implizite Darstellung: $F(x, y) = 5x - y - 2 = 0$

Kurve K ist als Menge der Punkte (x, y)

Parameterdarstellung: $t \rightarrow \vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t, 5t - 2)$ mit $\vec{r}(t)$ = Ortsvektor

Kurve K wird durch Koordinaten (x, y) beschrieben, die sich mit der Hilfsvariable t (Parameter t) verändern

Umwandeln der Darstellung

Parameterdarstellung $\rightarrow$ Explizit: $x(t)$ nach t auflösen und in $y(t)$ den Parameter t ersetzen (oder $y(t)$ nach t auflösen und in $x(t)$ den Parameter t ersetzen. Anschliessend nach y auflösen)

Bsp. $\vec{r}(t) = (t - 3, t^3 - t)$

$$x(t) = t - 3 \rightarrow t = x + 3$$

$$y(t) = t^3 - t = (x + 3)^3 - x - 3$$

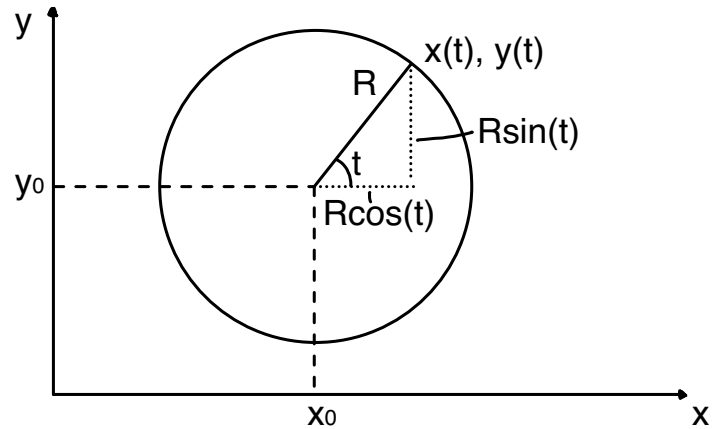
Wichtige Funktionen

Kreis

Explizit: $f(x) = \pm \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} + y_0$

Implizit: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
 $(R \cdot \cos(t))^2 + (R \cdot \sin(t))^2 = R^2$

Parametrisiert: $x(t) = x_0 + R \cdot \cos(t)$
 $y(t) = y_0 + R \cdot \sin(t)$

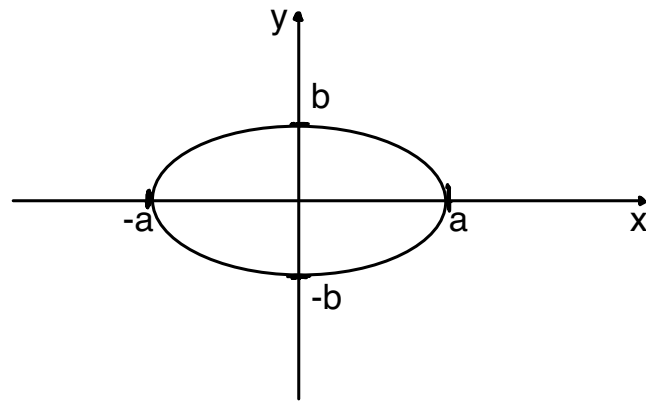


Ellipse

Explizit: $f(x) = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

Implizit: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

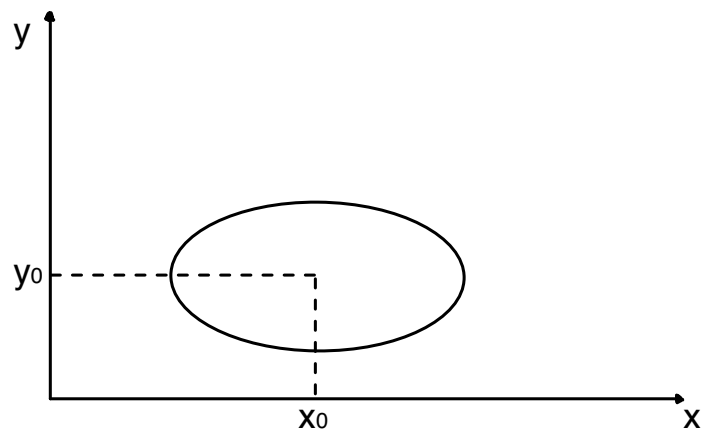
Parametrisiert: $x(t) = a \cdot \cos(t) \leftarrow x\text{-Halbachse}$
 $y(t) = b \cdot \sin(t) \leftarrow y\text{-Halbachse}$



Ellipse mit Mittelpunkt = (x0, y0)

Implizit: $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

Parametrisiert: $x(t) = x_0 + a \cdot \cos(t)$
 $y(t) = y_0 + b \cdot \sin(t)$

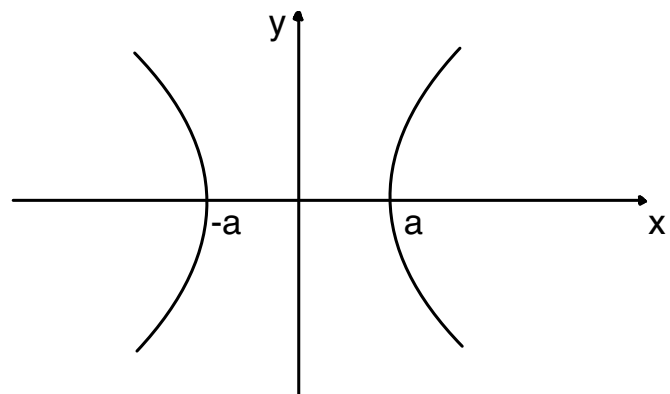


Hyperbel

Explizit: $f(x) = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$

Implizit: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Parametrisiert: $x(t) = \pm a \cdot \cosh(t)$
 $y(t) = b \cdot \sinh(t)$

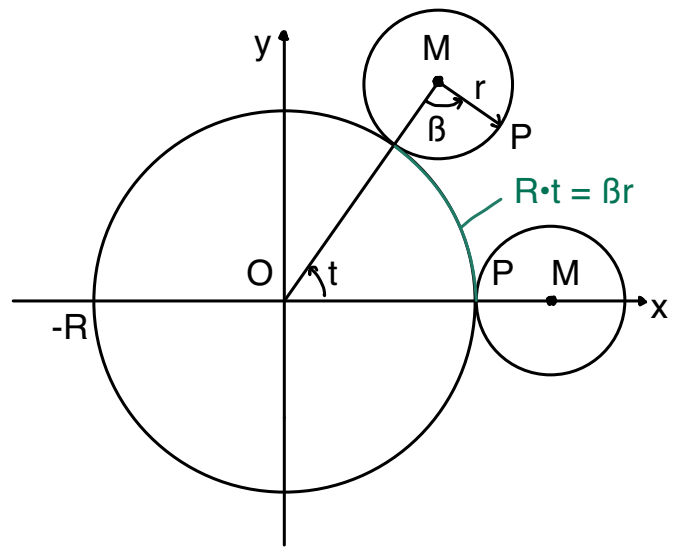


Epizykloide

$$\overline{OP} = \overline{OM} + \overline{MP}$$

$$\rightarrow \overline{OM} = \begin{pmatrix} (R+r)\cos(t) \\ (R+r)\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \overline{MP} = \begin{pmatrix} -r\cos(t+\beta) \\ -r\sin(t+\beta) \end{pmatrix}$$



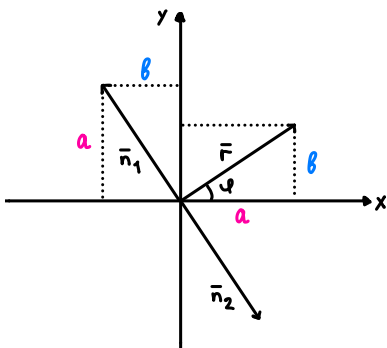
~> Abrollbedingung: $R \cdot t = \beta r$ $\rightarrow \beta = \frac{R}{r} t \rightarrow t + \beta = (1 + \frac{R}{r})t$

$$\rightarrow \overline{OP}(t) = \begin{pmatrix} (R+r)\cos(t) - r\cos((1 + \frac{R}{r})t) \\ (R+r)\sin(t) - r\sin((1 + \frac{R}{r})t) \end{pmatrix}$$

💡 Interessante Spezialfälle:

- Wenn $R = r$, entsteht eine Kardioide (Herzform ❤️).
- Wenn $R = 2r$, entsteht eine dreiblättrige Epizykloide (eine kleine, dreilappige Form).
- Wenn sich der Kreis innerhalb eines anderen abrollt, spricht man von einer Hypozykloide.

Normalenvektor



Geg: $\vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

⌈ Kreuzprodukt mit $\underline{e}_z$ ⌋

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

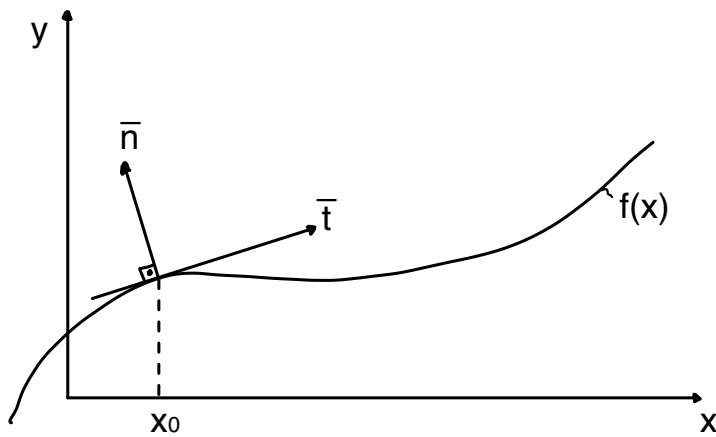
⌋

→ Normaleneinheitsvektor:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

Tangential–Normalenvektor

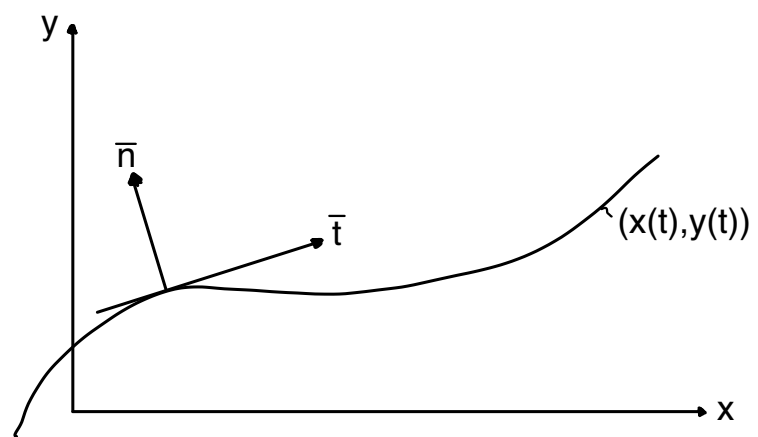
Explizit:



$$\bar{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$$

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} -f'(x_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Parametrisiert:



$$\bar{t} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

Tangente:

$$\bar{T}(s) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$$

Tipps Serie 8

1. Schau die Übung 5 & Oben
2. a) $x = f(\phi)\cos(\phi)$, $y = f(\phi)\sin(\phi) \Rightarrow f(\phi) = \dots$
b) Untersuche $f(\phi)$ mit 1. und 2. Ableitungen auf Extrempunkte, Periodizität und Differenzierbarkeit
3. b) Setze $x = y$ und finde t
c) $x'(t) = 0$ & $y'(t) = 0$ dann t finden