

Analysis 1 - Übung 7



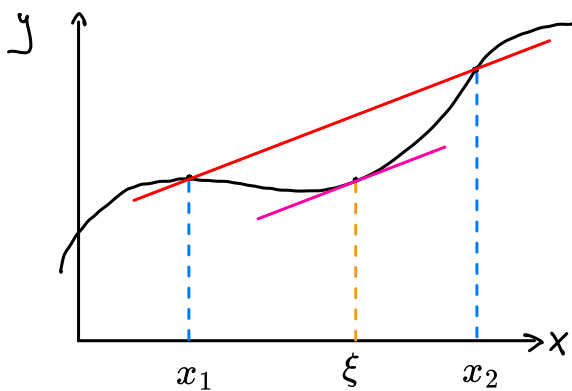
Recap:

Mittelwertsatz

Ableitung ist auch stetig. "macht keine wilden Dinge"

Sei $f(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion und x_1, x_2 zwei reelle Zahlen für welche gilt: $x_2 > x_1$

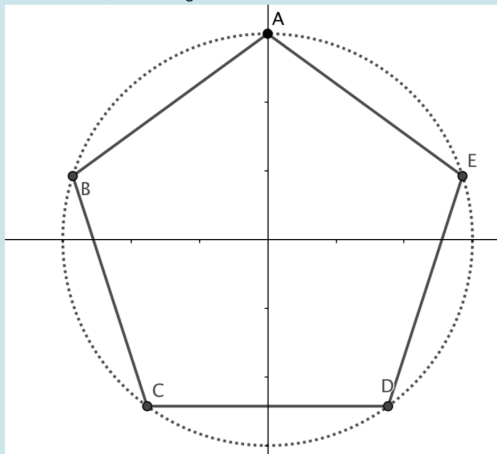
Mittelwertsatz:

Es existiert ein $\xi \in (x_1, x_2)$ für das gilt:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Innerhalb von einem **Intervall** mit einer **mittleren Steigung** gibt es eine **Stelle** mit derselben **Steigung**!

Folgerung:

Funktion $f(x)$ ist im Intervall $[x_1, x_2]$ monoton wachsend (bzw. fallend), wenn $f'(x) > 0$ für alle $x_1 < \xi < x_2$ (bzw. $f'(x) < 0$ für alle $x_1 < \xi < x_2$)b. (♥) Gibt es eine **reelle Zahl** w , sodass die Punkte A, B, C, D und E gerade die fünften Wurzeln von w sind? Begründen Sie!**Antwort:** Nein, eine solche reelle Zahl w gibt es nicht.**Begründung:**Wenn w eine **reelle Zahl** ist (also auf der horizontalen, reellen Achse liegt), dann muss mindestens eine ihrer n -ten Wurzeln ebenfalls reell sein (also auch auf der reellen Achse liegen).

- **Fall 1: $w > 0$ (positiv):** Die Gleichung $z^5 = w$ hat immer eine positive reelle Wurzel, nämlich $z_0 = \sqrt[5]{w}$. Diese liegt auf der positiven x -Achse.
- **Fall 2: $w < 0$ (negativ):** Die Gleichung $z^5 = w$ hat immer eine negative reelle Wurzel, nämlich $z_k = -\sqrt[5]{|w|}$. Diese liegt auf der negativen x -Achse.

Im Graphen: Keiner der fünf Punkte A, B, C, D oder E liegt auf der reellen Achse (der x -Achse).Daher können sie nicht die 5. Wurzeln einer reellen Zahl w sein.

Nullstellen von reellen Polynomen

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad n = \text{Grad des Polynoms} \quad a_i = \text{Koeffizienten} \in \mathbb{R}$$

- Hat genau n Nullstellen (reell & komplex zusammen)
- Komplexe Nullstellen kommen immer im komplex konjugiertem Paar vor.

Bsp. Finden sie die Nullstellen des Polynom $p(z)$. Zusätzlich gilt $p(1+i) = 0$.

$$p(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26 \quad \leadsto p(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_3) \cdot (z - z_4)$$

Reelles Polynom von Grad 4 $\Rightarrow$ hat 4 Nullstellen

$z_n = \text{Nullstellen des Polynoms}$

$$\boxed{1+i} \xrightarrow[\text{konjugiert}]{\text{komplex}} \boxed{1-i} \quad \leadsto p(z) = \underbrace{(z - (1+i))}_{\textcircled{1}} \cdot \underbrace{(z - (1-i))}_{\textcircled{2}} \cdot \underbrace{(\dots)}_{\textcircled{3}} \cdot \underbrace{(\dots)}_{\textcircled{4}}$$

$$\rightarrow (z - (1+i)) \cdot (z - (1-i)) = z^2 - 2z + 2$$

$\rightarrow$ Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26) : (z^2 - 2z + 2) = (z^2 - 4z + 13) \\ - (z^4 - 2z^3 + 2z^2) \\ \hline - 4z^3 + 21z^2 - 34z \\ - (-4z^3 + 8z^2 - 8z) \\ \hline 13z^2 - 26z + 26 \\ - (13z^2 - 26z + 26) \\ \hline 0 \end{array}$$

Mitternachtsformel!

$$ax^2 + bx + c \stackrel{!}{=} 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$p(z) = (z^2 - 2z + 2) \cdot (z^2 - 4z + 13)$$

$$z^2 - 4z + 13 = 0$$

$$\frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm \sqrt{-9} = \boxed{2 \pm 3i}$$

Bsp. Welche über die reellen r_p und komplexen c_p Nullstellen eines reellen Polynom $p(x)$ können getroffen werden, wenn dies von Grad 3 ist?

- $r_p + c_p = 3$
- $r_p \geq 1$

Partialbruchzerlegung

Komplizierte polynomiale Brüche zu "einfache" Brüche umformen

gegeben ist ein polynomialer Bruch $p(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ Bsp. $p(x) = \frac{5x^2 + x}{x^3 + 2}$

- ① Falls $\text{Grad}(f(x)) \geq \text{Grad}(g(x))$ führe Polynomdivision
- ② Nenner $g(x)$ Faktorisieren
- ③ Ansatz ausschreiben
- ④ Koeffizienten Vergleich $\leadsto$ konstanten bestimmen

Ansätze

i) n-fache Nullstelle : $\frac{(\dots)}{(x - x_0)^n} = \frac{A}{(x - x_0)} + \frac{B}{(x - x_0)^2} + \dots + \frac{Z}{(x - x_0)^n}$

ii) komplexe Nullstelle : $\frac{(\dots)}{(x^2 + 1)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)}$
z.B. $\rightarrow$

Bsp. Ansätze:

$$\frac{3x + 5}{(x + 1)(x + 4)} = \frac{A}{(x + 1)} + \frac{B}{(x + 4)}$$

$$\frac{3x + 5}{(x + 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{(x + 1)} + \frac{Bx + C}{(x^2 + x + 1)}$$

$\uparrow b^2 - 4ac = 1 - 4 < 0 \rightarrow \text{komplex}$

$$\frac{3x + 5}{(x + 1)^3(x + 4)} = \frac{A}{(x + 1)} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{(x + 1)^3} + \frac{D}{(x + 4)}$$

$$\frac{3x + 5}{(x + 1)^2(x^2 + x + 1)^2} = \frac{A}{(x + 1)} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + x + 1)} + \frac{Ex + F}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Bsp. Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2x}{(x - 5)(x + 3)} = \frac{A}{(x - 5)} + \frac{B}{(x + 3)} = \frac{A(x + 3) + B(x - 5)}{(x - 5)(x + 3)} = \frac{Ax + 3A + Bx - 5B}{(x - 5)(x + 3)}$$

D.h. $2x = (A + B)x + 3A - 5B$

Koeffizientenvergleich

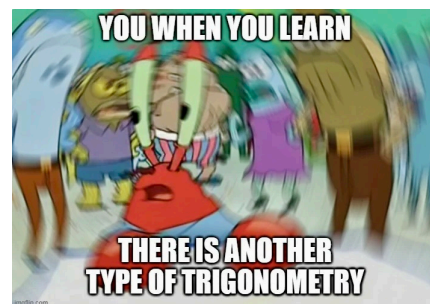
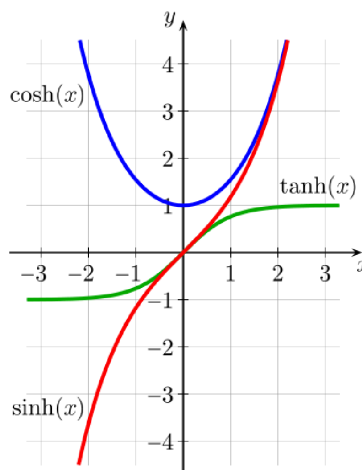
$$\left[\begin{array}{l} 2x = Ax + Bx \\ 0 = 3A - 5B \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{l} 2 = A + B \\ A = 5B/3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{l} B = 3/4 \\ A = 5/4 \end{array} \right] \Rightarrow \frac{2x}{(x - 5)(x + 3)} = \frac{5}{4(x - 5)} + \frac{3}{4(x + 3)}$$

Hyperbolische Trigonometrie

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \text{ungerade}$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \text{gerade}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$



• Identitäten:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$$

$$\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x) \quad \frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$$

• Umkehrfunktionen:

$$\operatorname{Arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\operatorname{Arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\operatorname{Artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$\operatorname{Arsinh}(\sinh(x)) = x$$

⋮

• Gut zu wissen

$$\sinh(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh(x) = \infty$$

$$\cosh(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cosh(x) = \infty$$

$$\tanh(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh(x) = 1$$

$$\sinh(-x) = -\sinh(x) = \text{ungerade}$$

$$\cosh(-x) = \cosh(x) = \text{gerade}$$

Größenordnungen von Funktionen – Landau Symbole

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \rightarrow a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

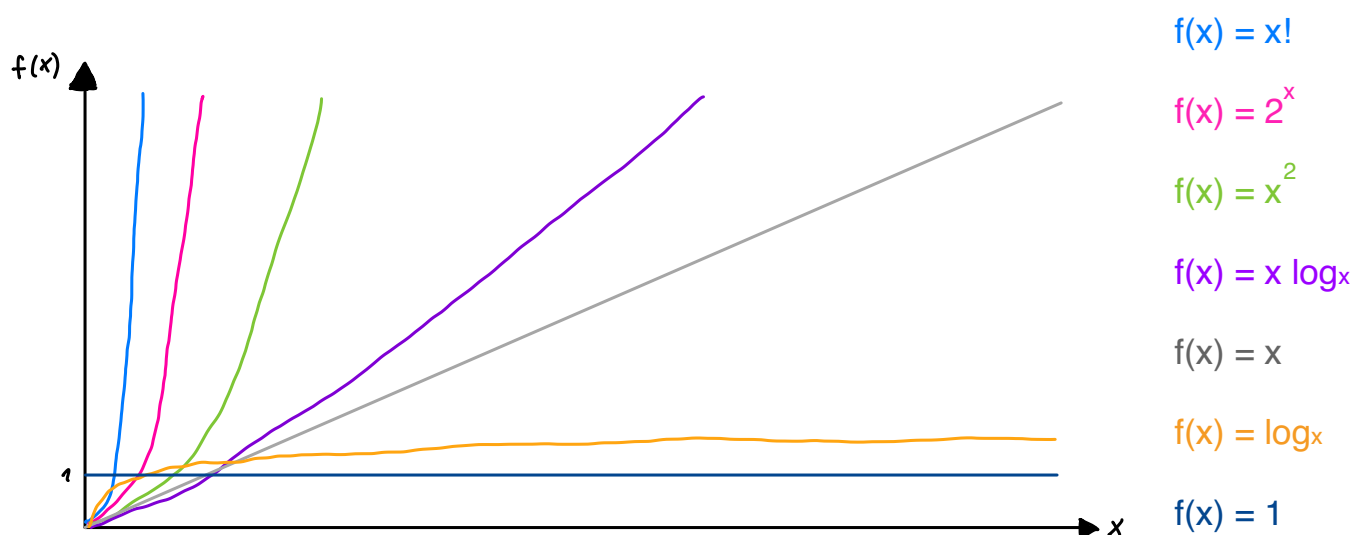
$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \rightarrow a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq A \in \mathbb{R}$$

$$\text{Es gilt: } x^k = o(e^x) \text{ für } x \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$e^{-x} = o(x^{-k}) \text{ für } x \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$(\ln(x))^j = o(x^k) \text{ für } x \rightarrow \infty, \quad k, j \in \mathbb{R}^+$$

$$(\ln(x))^j = o(x^{-k}) \text{ für } x \rightarrow 0^+, \quad k, j \in \mathbb{R}^+$$



Bsp.

Ordne die folgende Funktion der Grösse nach (für $x \rightarrow \infty$):

$$f_1(x) = x^3 \quad f_2(x) = \exp(5x+1) \quad f_3(x) = \ln(e^{x^{1/4}} - 2) \quad f_4(x) = \sqrt{x}$$

$$e^{5x+1} > x^3 > \sqrt{x} > \ln(e^{x^{1/4}} - 2)$$

5. (II) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = (x + \ln x)^2$. Welche Aussagen sind richtig?

✓ (a) $\sin x = o(f(x))$ für $x \rightarrow +\infty$.

✓ (b) $x(\ln x)^2 = o(f(x))$ für $x \rightarrow +\infty$.

✗ (c) $x^3 = o(f(x))$ für $x \rightarrow +\infty$.

✗ (d) $\ln(e^{x^2}) + \ln(e^x) = o(f(x))$ für $x \rightarrow +\infty$.

$$g(x) = o(f(x)) \text{ für } x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

$$f(x) = (x + \ln(x))^2 = x^2 + 2x\ln(x) + \ln(x)^2$$

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{(x + \ln(x))^2} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln(x)^2}{(x^2 + 2x \ln(x) + \ln(x)^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{x}{\ln(x)^2} + \frac{2}{\ln(x)} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{x}{\ln(x)^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)^2}{x} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x^2 + 2x \ln(x) + \ln(x)^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{2 \ln(x)}{x^2} + \frac{\ln(x)^2}{x^3}} = \infty$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{x^2}) + \ln(e^x)}{(x^2 + 2x \ln(x) + \ln(x)^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 + 2x \ln(x) + \ln(x)^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x^2 + 2x \ln(x) + \ln(x)^2)} + \frac{x}{x^2 + 2x \ln(x) + \ln(x)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{2 \ln(x)}{x} + \frac{\ln(x)^2}{x^2}} + \frac{1}{x + 2 \ln(x) + \frac{\ln(x)^2}{x}} = 1$$

Thread

♥ Sunjay liked



jwcarroll
@jwcarroll

Alternative Big O notation:

$O(1) = O(\text{yeah})$

$O(\log n) = O(\text{nice})$

$O(n) = O(\text{ok})$

$O(n^2) = O(\text{my})$

$O(2^n) = O(\text{no})$

$O(n!) = O(\text{mg!})$

8:10 PM · 06 Apr 19 · [Twitter for Android](#)

3,665 Retweets 9,265 Likes

