

Analysis 1 - Übung 6



$\mathbb{N}$ = natürliche Zahlen = $\{(0), 1; 2; 3; \dots\}$ $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1; 2; 3; \dots\}$

$\mathbb{Z}$ = ganze Zahlen = $\{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots\}$

$\mathbb{Q}$ = rationale Zahlen = $\{p/q; p, q \text{ sind } \mathbb{Z} \text{ und } q \neq 0\}$

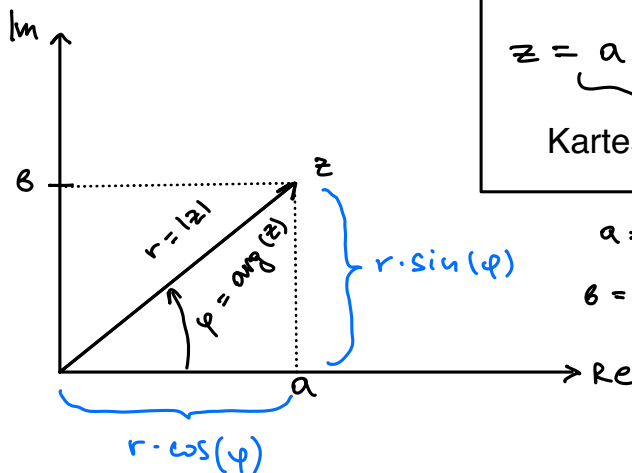
$\mathbb{R}$ = reelle Zahlen = alle Zahlen die auf der Zahlengerade liegen

$\mathbb{C}$ = komplexe Zahlen = $\{z = a + ib; a, b \text{ sind } \mathbb{R} \text{ und } i = \sqrt{-1} \text{ oder } i^2 = -1\}$

↳ Imaginäre Einheit

Komplexe Zahlen

$$i^2 = -1$$



$$z = \underbrace{a + ib}_{\text{Kartesisch}} = \underbrace{r \cos(\varphi) + i \cdot r \sin(\varphi)}_{\text{Polardarstellung}} = \underbrace{r \cdot e^{i\varphi}}_{\text{Euler-Darstellung}}$$

$$a = \text{Realteil} = \operatorname{Re}(z)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$b = \text{Imaginärteil} = \operatorname{Im}(z)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi] \quad \varphi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

‣ Addition

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2)$$

‣ Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

‣ Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

‣ Potenzieren

$$z^5 = (r \cdot e^{i\varphi})^5 = r^5 \cdot e^{i\varphi \cdot 5}$$

‣ Wurzeln ziehen → Gesucht z

$$z^n = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot e^{i(\varphi + 2\pi k)}$$

$$z_k = \sqrt[n]{r \cdot e^{i(\varphi + 2\pi k)}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)} = \boxed{\sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)} = z_k}$$

Es resultieren n verschiedene Lösungen: $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

Komplex konjugierte $\bar{z}$:

Vorzeichen des Imaginärteils wird geändert:

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi = r \cdot e^{-i\varphi} = r \cdot (\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)) = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$$

Rechenregeln:

Bsp: $z = 2 - 5i$

$$\overline{\bar{z}} = z$$

$\rightarrow \bar{z} = 2 + 5i$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

Betrag $|z|$: $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

Umrechnungen:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{für } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{für } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{für } a < 0, b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

Von polar zur
allgemeinen Form:

$$a = r \cos(\varphi)$$

$$b = r \sin(\varphi)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$$

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$$



Bsp.1

$$z^4 = 1+i \rightarrow \text{ges. } z$$

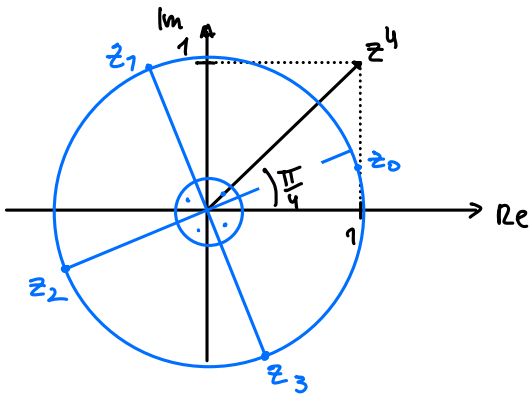
$$z^4 = 1+i = \sqrt{1^2+1^2} \cdot e^{i\pi/4} = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

$$= \sqrt{2} \cdot e^{i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)}$$

$$z = (\sqrt{2})^{1/4} \cdot e^{i \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right)}$$

$$= 2^{1/8} \cdot e^{i \left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \cdot k \right)} = z_k$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$



$$2^{1/8} > 1$$

$$z_0 = 2^{1/8} e^{i\pi/16}$$

$$z_2 = 2^{1/8} \cdot e^{i\frac{9\pi}{16}}$$

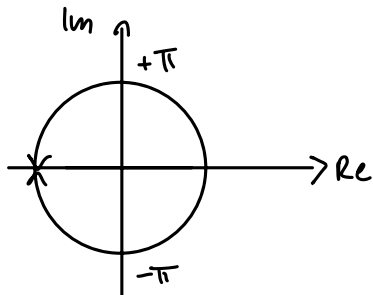
$$z_1 = 2^{1/8} \cdot e^{i\frac{5\pi}{16}}$$

$$z_3 = 2^{1/8} \cdot e^{i\frac{13\pi}{16}}$$

Bsp.2

$$z = \frac{1}{(1+i)^4}$$

Idee: Dividieren & potenzieren einfach im Euler-Form



$$1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$$

$$(1+i)^4 = (\sqrt{2})^4 \cdot e^{i(\frac{\pi}{4}) \cdot 4} = 2^2 \cdot e^{i\pi} = 4 e^{i\pi}$$

$$\frac{1}{(1+i)^4} = \frac{1}{4 e^{i\pi}} = \frac{1}{4} e^{-i\pi} = z = -\frac{1}{4} = \underline{\underline{z}}$$

Bsp.3

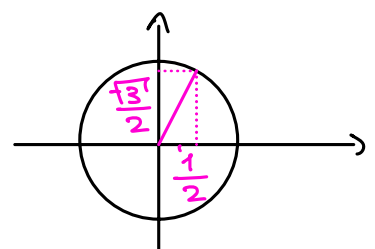
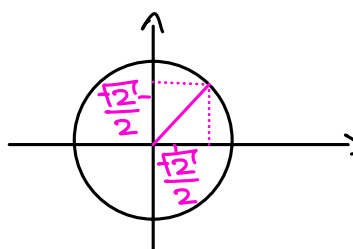
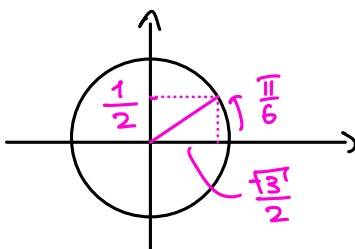
$$\frac{2+2i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{\sqrt{2^2+2^2} e^{i\pi/4}}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} e^{i\pi/6}} = \frac{\sqrt{8} e^{i\pi/4}}{e^{i\pi/6}} = \sqrt{8} e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})} = \sqrt{8} e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Winkel & Achsenabschnitte finden: $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}$ $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$$

$$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$$



Bsp.4 Welches z erfüllt folgende Gleichung:

$$(2-i) \cdot z = 1+z$$

$$z = x + iy$$

$$(2-i)(x+iy) = 1+x+iy$$

$$2x + 2iy - ix + y = 1 + x + iy$$

$$(2x+y) + i(2y-x) = (1+x) + i(y)$$

Re :

$$2x + y = 1 + x$$

Im :

$$2y - x = y$$

$$\leadsto x = y = \frac{1}{2} \rightarrow$$

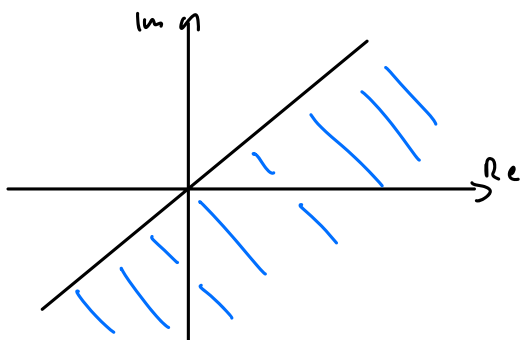
$$z = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$$

Bereiche in der komplexen Ebene skizzieren

Gesucht sind alle z , die folgendes erfüllen:

• $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z)$

$$z = x + iy$$



• $\operatorname{Re}(iz) > 2$

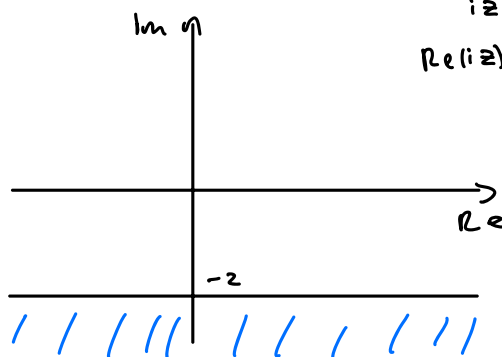
$$z = x + iy$$

$$iz = ix - y$$

$$\operatorname{Re}(iz) = -y > 2$$

$$-y > 2$$

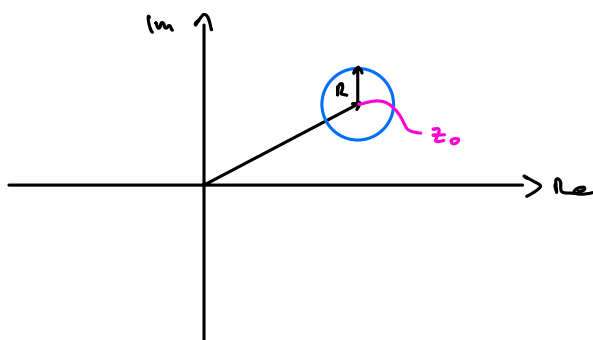
$$y < -2$$



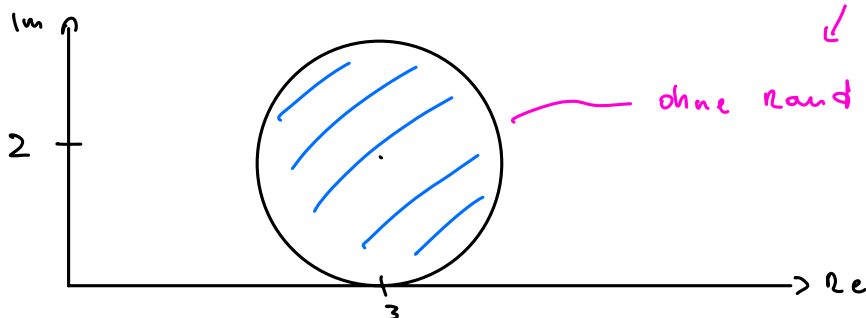
• Kreise & Komplexe Zahlen

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\} \rightarrow$ Kreis mit Mittelpunkt z_0 & Radius R



$\rightarrow$ Bsp.: $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - (3+2i)| < 2\}$



Trigonometrische Beziehungen mit komplexen Zahlen herleiten

Bsp.

$$\begin{aligned}\cos(2x) + i \sin(2x) &= e^{i(2x)} = (e^{ix})^2 = (\cos(x) + i \sin(x))^2 \\ &= \cos^2(x) + 2i \sin(x) \cos(x) - \sin^2(x) \\ \cos(2x) + i \sin(2x) &= (\cos^2(x) - \sin^2(x)) + i (2 \sin(x) \cos(x)) \\ \text{Re:} \quad \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ \text{Im:} \quad \sin(2x) &= 2 \sin(x) \cos(x)\end{aligned}$$

1) Ausdruck in Polardarstellung bringen(komplex)

2) Umformen

3) Zurück in Polardarstellung

Bsp.

Identität für $\sin(x+y)$

$$\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) = e^{i\varphi}$$

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \text{Im}(\cos(x+y) + i \sin(x+y)) = \text{Im}(e^{i(x+y)}) = \text{Im}(e^{ix} \cdot e^{iy}) \\ &= \text{Im}((\cos(x) + i \sin(x)) \cdot (\cos(y) + i \sin(y))) \\ &= \text{Im}(\cos(x) \cos(y) + i \cos(x) \sin(y) + i \sin(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y))\end{aligned}$$

$$\sin(x+y) = \cos(x) \sin(y) + \sin(x) \cos(y)$$

Tipps Serie 6:

1. Bereiche in der komplexen Ebene skizzieren
2. Zuerst in die Euler-Form und dann in die Polarform
3. Wurzeln ziehen und k finden