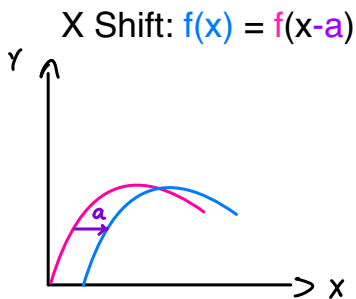


Analysis 1 - Übung 5

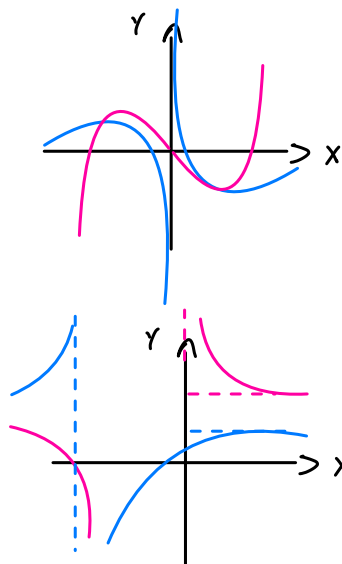


Recap:



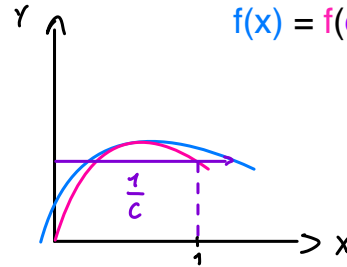
Invertieren entlang X:

$$f(x) = f(1/x)$$

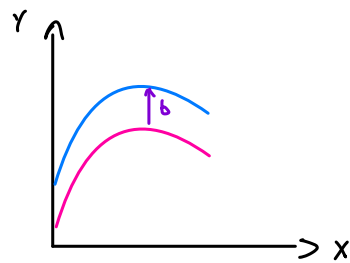


Strecken/Stauchen entlang X:

$$f(x) = f(cx)$$

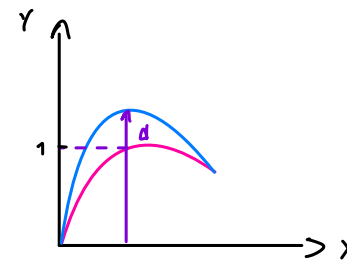
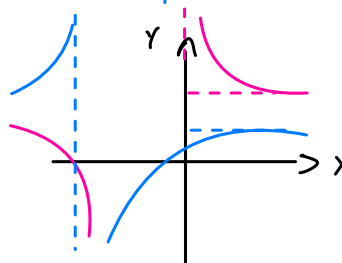


$|c| < 1$ Strecken
 $|c| > 1$ Stauchen
 $c < 0$ Spiegeln bei Y

Y Shift: $f(x) = f(x) + b$

Invertieren entlang Y:

$$f(x) = 1/f(x)$$



$|d| > 1$ Strecken
 $|d| < 1$ Stauchen
 $d < 0$ Spiegeln bei X

Strecken/Stauchen entlang Y:

$$f(x) = d \cdot f(x)$$

InjektivSurjektiv

Jeder Horizontale schneidet den Graphen höchstens einmal

Jeder Wert im Zielbereich $Z(f)$ wird angenommen

Jeder Horizontale schneidet den Graphen mindestens einmal

$$f^{-1}(y) = 1 - e^{-y}$$

$$f^{-1}(x) = 1 - e^{-x}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a(g(x)) = \frac{1}{\ln(a)g(x)}$$

• Lineare Ersatzfunktion = Tangente

Differenzenquotient : Δ

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0$$

Differentialquotient:

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Fehlerrechnung

Wir messen eine Grösse x mit Messfehler Δx .

Mit dieser gemessenen Grösse x berechnen wir eine Grösse $f(x)$.

Wie wirkt sich der Messfehler Δx auf f aus?

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

► Absoluter Fehler

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

für kleine Δx

$$\Delta f \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

Der absolute Fehler ist die (betragsmässige) Abweichung vom Sollwert oder wahren Wert. (Immer positiv)

z.B Eine Strecke ist 12 m lang, man misst 14m. Absoluter Fehler = $|12-14| = 2\text{m}$

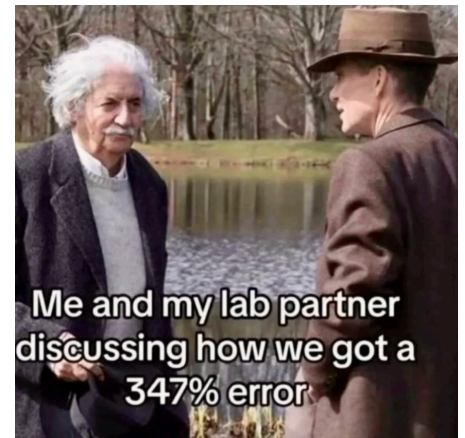
► Relativer Fehler

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\text{Absoluter Fehler}}{f}$$

Der relative Fehler setzt den absoluten Fehler ins Verhältnis zur Grösse des wahren Werts (oder Sollwerts).

Die Einheit [relativer Fehler] ist häufig %

z.B Eine Strecke ist 12 m lang, man misst 14m. Relativer Fehler = $|12-14|/12 = 1/6$



Bsp.1 Fläche eines Rechtecks mit Seitenlängen a , b . b ist bekannt, a hingegen wird gemessen.

$$A = f(a) = a \cdot b \quad \text{Messgrösse } a \quad \text{Messfehler } \Delta a$$

Absoluter Fehler

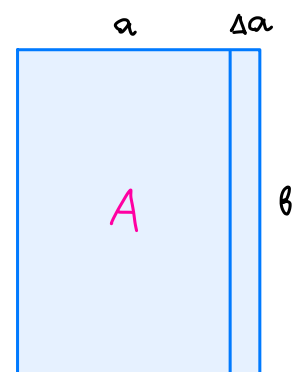
$$\begin{aligned} \Delta f &= f(a + \Delta a) - f(a) \\ &= (a + \Delta a) \cdot b - a \cdot b \\ &= \cancel{a \cdot b} + \Delta a \cdot b - \cancel{a \cdot b} \end{aligned}$$
$$\Delta f = \Delta a \cdot b$$

Relativer Fehler

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta a \cdot b}{a \cdot b} = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta f}{f}$$

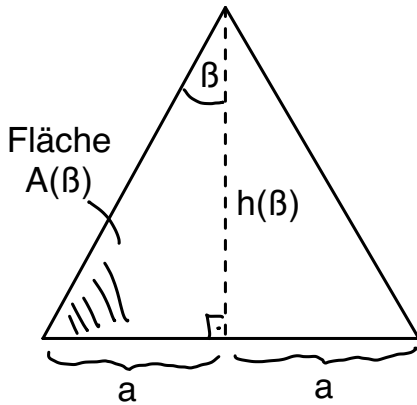
$$\Delta f \approx f'(a) \cdot \Delta a$$

$$= b \cdot \Delta a \approx \Delta f$$



Bsp.2

Was ist ΔA wenn β mit einem Fehler $\Delta\beta$ gemessen wird?



$$\Delta A \approx A'(\beta) \cdot \Delta\beta$$

$$A(\beta) = \frac{h(\beta) \cdot \cancel{2a}}{\cancel{2}} = h(\beta) \cdot a$$

Grundseite
Höhe

$$\rightarrow \tan(\beta) = \frac{a}{h(\beta)} \quad \rightarrow h(\beta) = \frac{a}{\tan(\beta)}$$

$$A(\beta) = \frac{a}{\tan(\beta)} \cdot a = \frac{1}{\tan(\beta)} a^2 = a^2 \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} = A(\beta)$$

$$A'(\beta) = -\frac{1}{\sin^2(\beta)} \cdot a^2$$

$$\rightarrow \Delta A = A'(\beta) \cdot \Delta\beta$$

absoluter Fehler

$$\Delta A(\beta) = -\frac{1}{\sin^2(\beta)} \cdot a^2 \Delta\beta$$

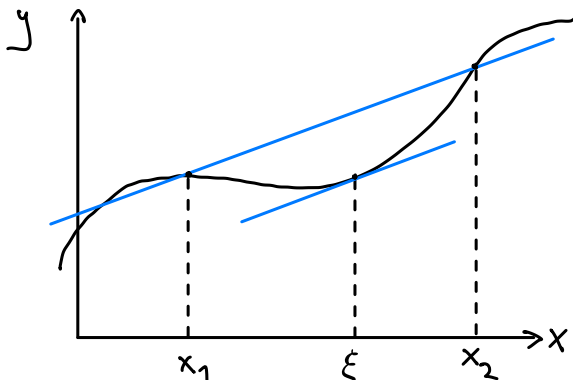
$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{-\frac{1}{\sin^2(\beta)} \cdot \cancel{a^2} \cdot \Delta\beta}{\cancel{a^2} \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)}} = \frac{-\Delta\beta}{\sin(\beta) \cdot \cos(\beta)} = \frac{\Delta A}{A}$$

relativer Fehler

Mittelwertsatz

Ableitung ist auch stetig. "macht keine wilden Dinge"

Sei $f(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion und x_1, x_2 zwei reelle Zahlen für welche gilt: $x_2 > x_1$

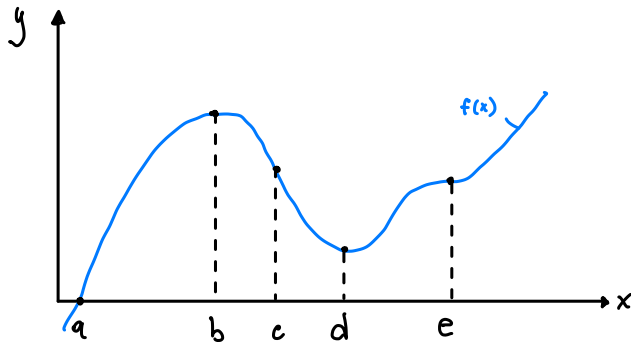


Mittelwertsatz:

Es existiert ein $\xi \in (x_1, x_2)$ für das gilt:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

2. Ableitung



a: $f(a) = 0$

b: $f'(b) = 0$ $f''(b) < 0 \rightarrow$ lokales Maximum

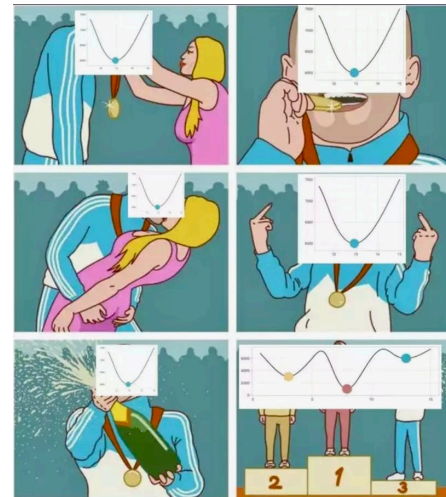
c: $f'(c) < 0$ $f''(c) = 0 \rightarrow$ Wendepunkt

d: $f'(d) = 0$ $f''(d) > 0 \rightarrow$ lokales Minimum

e: $f'(e) = 0$ $f''(e) = 0 \rightarrow$ Sattelpunkt

Vorgehen-Extremalstellen bestimmen

1. Ränder des Definitionsbereich $\rightarrow$ Kandidaten
2. $f'(x) \stackrel{!}{=} 0$ setzen $\rightarrow$ Kandidaten
3. Kandidaten vergleichen



Bsp. $f(x) = x^4 - x^2$ $D(f) = [-2, 2]$

1. Ränder Untersuchen

$f(-2) = 12$ & $f(2) = 12$

2. $f'(x) \stackrel{!}{=} 0$

$f'(x) = 4x^3 - 2x \stackrel{!}{=} 0$

$4x^2 - 2 = 0$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$x_{2,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x_1 = 0 \rightarrow f(0) = 0$

$\rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}$

$f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}$

3. Kandidaten vergleichen

Rand: $f(-2) = 12$
 $f(2) = 12$

$f'(x) = 0$: $f(0) = 0$
 $f(1/\sqrt{2}) = -1/4$
 $f(-1/\sqrt{2}) = -1/4$

$\rightarrow$ globale Extremalstellen bei $x = -2$, $x = 2$, $x = 1/\sqrt{2}$ & $x = -1/\sqrt{2}$

$\rightarrow$ lokale Extremalstellen bei $x = 0$

Bernoulli L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

oder

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

When you learn L'Hopital's Rule AFTER studying every other method for finding limits:



Tipps Serie 5

1. Bernoulli L'Hôpital
2. a) Zwei mal Ableiten und vergleichen
b) Fall unterschied für d
3. Lineare Ersatzfunktion
4. Zeige Stetigkeit mit erste Ableitung