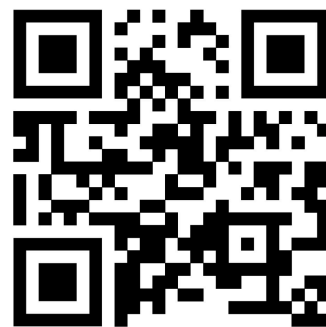


## Analysis 1 - Übung 4

Differenzenquotient :  $\Delta$ 

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0$$

Zeigt die mittlere Änderungsrate der Funktion über ein kleines Intervall  $h$ .

Bsp.  $f(x) = x^2$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h =$$

Differentialquotient:

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Bsp.

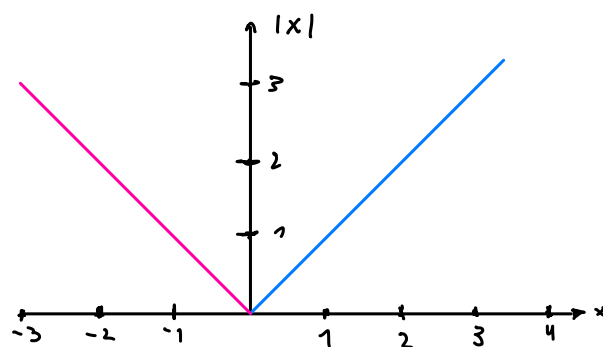
$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x =$$

Existiert der Differentialquotient, so ist die Funktion  $f(x)$  differenzierbar in  $h$  (rechte und linke Grenzwert müssen existieren und übereinstimmen)

Ist die Funktion  $f(x)$  differenzierbar in  $h$ , so ist die Funktion  $f(x)$  auch stetig in  $h$

Bsp.  $f(x) = |x|$  ist im Punkt  $h = 0$  nicht differenzierbar



$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

## Rechenregel

### • Allgemein

$$f(x) = ax^m \quad f'(x) = a \cdot mx^{m-1}$$

Bsp.  $f(x) = 3x^5 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot 5x^{5-1} = 15x^4$  //

### • Summenregel

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Bsp.  $f(x) = 3x^5 + 2x \Rightarrow f'(x) = 15x^4 + 2$  //

### • Produktregel

$$f(x) = g(x)h(x) \quad f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

Bsp.  $f(x) = 4x^5 \cdot (x^7 - x^2) \Rightarrow f'(x) = 20x^4 \cdot (x^7 - x^2) + (7x^6 - 2x) \cdot 4x^5$  //

$g(x) = 4x^5 \quad h(x) = x^7 - x^2$   
 $g'(x) = 20x^4 \quad h'(x) = 7x^6 - 2x$

### • Quotient

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}$$

Bsp.  $f(x) = \frac{x^2}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2(1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$  //

$g(x) = x^2 \quad g'(x) = 2x \quad h(x) = x+1 \quad h'(x) = 1$

### • Kettenregel

$$f(x) = g(x) \circ h(x) = g(h(x)) \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

### Bsp.

$$f(x) = (3x^2 + 5)^3 \Rightarrow g(\cdot) = (\cdot)^3, h(x) = 3x^2 + 5 \Rightarrow f'(x) = 3(3x^2 + 5)^2 \cdot 6x = 18x(3x^2 + 5)^2$$
 //

## Spezialfälle

- Inverse

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Bsp.

$$f(x) = x^2 + 2 \Leftarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2}$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 2}} //$$

- Trigonometrische Funktionen

$$f(x) = \cos(g(x)) \Rightarrow f'(x) = -\sin(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = \sin(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \cos(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = \tan(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(g(x))} \cdot g'(x)$$

Bsp.  $f(x) = \sin(5x^3) \Rightarrow f'(x) = 15x^2 \cos(5x^3) //$

- Sonstige Funktionen

$$f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} g'(x)$$

Bsp.  $f(x) = 5e^{x^2} \Rightarrow f'(x) = 10xe^{x^2} //$

$$f(x) = \ln(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Bsp.  $f(x) = 5 \ln(x^2 + 2) \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{x^2 + 2} \cdot 2x = \frac{10x}{x^2 + 2} //$

"I'll change him."

$$\triangleright \frac{d}{dx} e^x = e^x$$

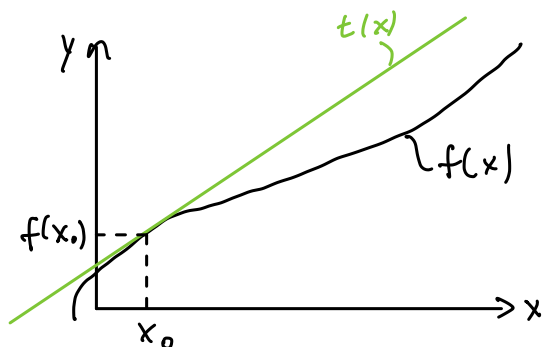
$$\triangleright \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$\triangleright \frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$



| Symbol                      | Name                            | Bedeutung / Anwendung                                                                   |
|-----------------------------|---------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Delta$                    | Differenzenquotient             | Änderung auf einem Intervall, diskrete Approximation                                    |
| $d$                         | Ableitung (gewöhnlich)          | Differentialquotient für Funktionen mit einer Variablen                                 |
| $\partial$                  | Partielle Ableitung             | Änderung nach einer Variablen bei Funktionen mit mehreren Variablen                     |
| $\nabla f$                  | Gradient                        | Vektor aller partiellen Ableitungen                                                     |
| $\Delta f$                  | Laplace-Operator (Laplacian)    | Summe der zweiten partiellen Ableitungen, wichtig in Differentialgleichungen und Physik |
| $\dot{x}, \ddot{x}$         | Newton-Notation (Punkte)        | Zeitableitungen in der Mechanik und Physik                                              |
| $\delta$                    | Variation / Funktionalableitung | Ableitung nach einer ganzen Funktion, z. B. in Variationsrechnung, Quantenphysik        |
| $f'(x), f''(x), f^{(n)}(x)$ | Lagrange-Notation (Striche)     | Erste, zweite oder n-te Ableitung                                                       |
| $Df(x), D^n f(x)$           | Operator-Notation               | Häufig in Algebra und Funktionalanalysis                                                |

## Tangenten



$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Eine Tangente  $t(x)$  an die Funktion  $f(x)$  im Punkt  $x_0$ , erfüllt Folgendes:

- $t'(x_0) = f'(x_0)$
- $t(x_0) = f(x_0)$

Bsp. Tangente an  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$  im Punkt  $x_0 = 4$ .

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (1+2x)^{-1/2} = -\frac{1}{2} (1+2x)^{-3/2} \cdot 2 = \frac{-1}{(1+2x)^{3/2}}$$

$$f'(x_0) = \frac{-1}{(1+2 \cdot 4)^{3/2}} = \frac{-1}{(9^{1/2})^3} = \frac{-1}{3^3} = \frac{-1}{27} = \boxed{\frac{-1}{27} = f'(x_0)}$$

$$f(x_0) = \frac{1}{(1+2 \cdot 4)^{1/2}} = \frac{1}{9^{1/2}} = \boxed{\frac{1}{3} = f(x_0)}$$

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{27}\right) \cdot (x - 4) = \boxed{-\frac{1}{27}x + \frac{13}{27} = t(x)}$$

## Tipps Serie 4

1. Regeln oben anwenden
2.  $f(x) = -f(-x) = \text{ungerade}$  &  $f(x) = f(-x) = \text{gerade}$
3. Formel oben

**When the math teacher says  
"any questions?" at the end of the lesson  
and everyone's just sitting there quietly,  
pretending that they don't have questions**

