

Analysis 1 - Übung 3

Recap:

- arithmetische Folge + Reihe

► **Explizit:** $a_n = a_1 + d(n - 1)$ **Rekursiv:** $a_n = a_{n-1} + d$

►
$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{2} \cdot n[a_1 + a_n] \text{ oder } S_n = \frac{1}{2} \cdot n[2a_1 + d(n - 1)]$$

- geometrische Folge + Reihe

► **Explizit:** $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ **Rekursiv:** $a_n = a_{n-1} \cdot q$

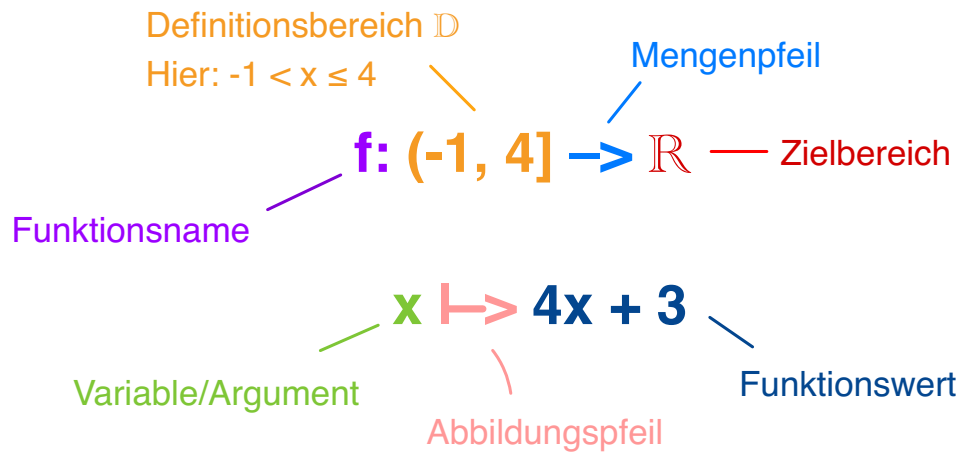
►
$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^n) = a_1 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

►
$$S_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1(1 + q + q^2 + \dots) = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q}, \text{ falls } |q| < 1$$

WICHTIG: Für die rekursive Darstellung braucht es einen Ankerpunkt/Startwert!

- konvergent $\Rightarrow$ besitzt einen Grenzwert
- konvergent $\Rightarrow$ beschränkt $\nRightarrow$ divergent/konvergent
- konvergent $\nRightarrow$ monoton wachsend/fallend
- divergent falls nicht konvergent

Funktionen



- Bild/Wertebereich: Alle “erreichbaren” Funktionswerte

Für $f(x) = 4x + 3$ mit $\mathbb{D} = (-1, 4]$ ist das **der Wertebereich/das Bild** $\mathbb{W}(f) = \text{Im}(f) = (-1, 19]$

Bsp.

- Thermometer $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Input: Punkt mit Koordinaten (x, y, z)

Output: Temperatur in $^{\circ}\text{C}$

$$\mathbb{W} = [-273.15, \infty)$$

- Barometer: $[0, 10000\text{m}] \rightarrow \mathbb{R}$

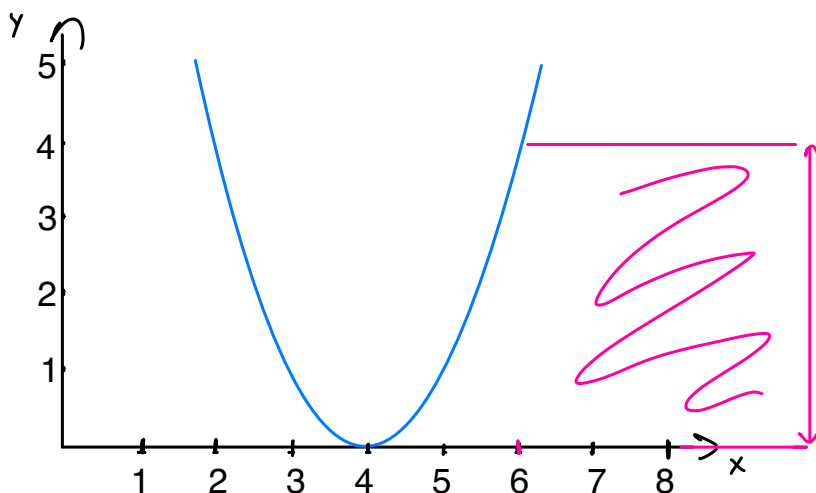
Input: Höhe in m

Output: Druck in bar

$$\mathbb{W} = (0, 1]$$

- $f(x) = (x - 4)^2$

$$\mathbb{D} = [2, 6]$$



Alle Werte dazwischen werden erreicht $\Rightarrow \mathbb{W}(f) = [0, 4]$

Injektiv, Surjektiv & Bijektiv

Injektiv

Jeder Horizontale schneidet den Graphen höchstens einmal

Surjektiv

Jeder Wert im Zielbereich $Z(f)$ wird angenommen

$$f: A \rightarrow B, \quad B = Z(f)$$

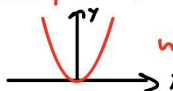
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$W(f) = Z(f)$$

Bsp. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ injektiv



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$



injektiv & surjektiv
= bijektiv

Bsp. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$
 $y \in \mathbb{R} \quad f^{-1} = \sqrt[3]{y}$ surjektiv

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$
 $y \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad f^{-1} = \sqrt{y}$ nicht surjektiv

$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = n-1$
 $y \in \mathbb{Z} \quad f^{-1} = y+1$ surjektiv

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 2n$ nicht surjektiv

$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin(x)$ surjektiv

Bsp. $f(x) = 4x + 3 \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\rightarrow$ Injektiv $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$4x_1 + 3 = 4x_2 + 3 \quad | -3$$

$$4x_1 = 4x_2 \quad | :4$$

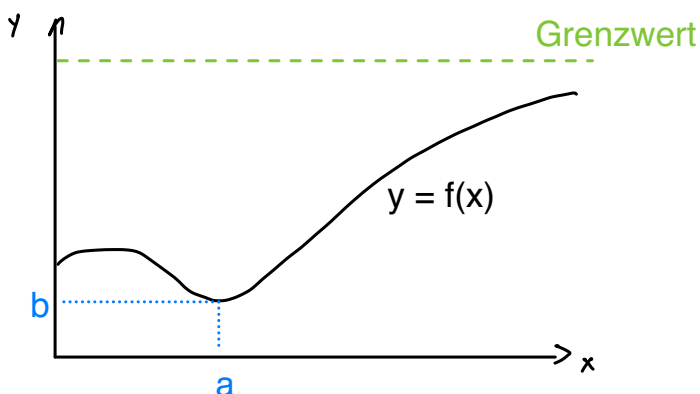
$$x_1 = x_2 \quad \Rightarrow \text{injektiv!}$$

$\Rightarrow$ bijektiv

$\rightarrow$ Surjektiv $W(f) = Z(f) = \mathbb{R}$

Die Funktion nimmt wirklich jeden Wert in $\mathbb{R}$ an. $\rightarrow$ surjektiv

Umkehrfunktionen



$$\text{Ges: } x = f^{-1}(y) = ?$$

Damit $f^{-1}(y)$ existiert, muss $f(x)$ **bijektiv** sein:

$\rightarrow$ Um $f(x)$ zu invertieren, muss den Definitionsbereich $D(f)$ einschränken.

$$\text{z.B: } D(f) = [a, \infty) \longrightarrow W(f^{-1}) = [a, \infty) = D(f)$$

$$W(f) = [b, d) \longrightarrow D(f^{-1}) = [b, d) = W(f)$$

Bsp.

$$\triangleright y = \underbrace{\log_a(x)}_{f(x)}$$

$$x = \underbrace{a^y}_{f^{-1}(y)}$$



$$\mathbb{D}(f) = (0, \infty)$$

$$\mathbb{D}(f^{-1}) = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{W}(f) = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{W}(f^{-1}) = (0, \infty)$$

$f(x)$



$f^{-1}(x)$



$$\triangleright y = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

“nur positive Zahlen im $\ln(\cdot)$ ”
“ $\ln(0)$ nicht definiert”

Gesucht: $\mathbb{D}(f)$, $\mathbb{W}(f)$, $\mathbb{D}(\bar{f}^{-1})$, $\mathbb{W}(\bar{f}^{-1})$, $\bar{f}^{-1}$

→ Definitionsbereich

$$\mathbb{D}(f) = (-\infty, 1)$$

→

$$\mathbb{W}(\bar{f}^{-1}) = (-\infty, 1)$$

$$\frac{1}{1-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1$$

→ Wertebereich

$$\mathbb{W}(f) = \mathbb{R}$$

→

$$\mathbb{D}(\bar{f}^{-1}) = \mathbb{R}$$

→ Umkehrfunktion

$$y = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$e^1$$

$$e^y = \frac{1}{1-x}$$

$$1^{-1}$$

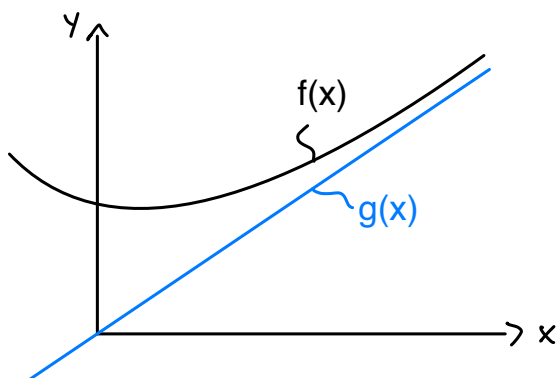
$$\frac{1}{e^y} = 1 - x$$

$$+x - \frac{1}{e^y}$$

$$x = 1 - \frac{1}{e^y}$$

$$f^{-1}(y) = 1 - e^{-y}$$

Asymptoten/Polynomdivision



Die Asymptote $g(x)$ zur Funktion $f(x)$ erfüllt folgende Bedingung:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

Bsp. $\ln(1 + x^{-2} + e^{2x}) + \frac{x+1}{x}$

Ges. Asymptote für $x \rightarrow \infty$ der Form $ax + b$

$$\ln(1 + x^{-2} + e^{2x}) + \frac{x+1}{x} \stackrel{x \rightarrow \infty}{\approx} \ln(e^{2x}) + \frac{x}{x} = 2x + 1$$

$$\ln(e^{2x}) + \frac{x}{x} = 2x + 1$$



Überprüfen: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x) \stackrel{?}{=} 0$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\ln(1 + x^{-2} + e^{2x}) + \frac{x+1}{x}}_{f(x)} - \underbrace{(2x+1)}_{g(x)} \stackrel{?}{=} 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + x^{-2} + e^{2x}) - 2x + \frac{x+1}{x} - 1 \stackrel{?}{=} 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + x^{-2} + e^{2x}) - \ln(e^{2x}) + \underbrace{\frac{1 + \frac{1}{x}}{1}}_0 - 1 \stackrel{?}{=} 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1 + x^{-2} + e^{2x}}{e^{2x}}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1}{e^{2x}} + \frac{1}{x^2 e^{2x}} + 1\right) = \ln(1) = 0 = 0 \quad \checkmark$$

Bsp.

Finde eine Asymptote für $x \rightarrow \infty$ für die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x + 2}$$

Polynomdivision: $(x^3 - 2x^2 + 3) : (x + 2) = x^2 - 4x + 8 + \frac{-13}{x + 2}$

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 + 3) : (x + 2) = x^2 - 4x + 8 + \frac{-13}{x + 2} \\ -(x^3 + 2x^2) \\ \hline -4x^2 + 3 \\ -(-4x^2 - 8x) \\ \hline 8x + 3 \\ -(8x + 16) \\ \hline -13 \end{array}$$

$$f(x) = \underbrace{x^2 - 4x + 8}_{\rightarrow \infty} - \frac{13}{x + 2} \stackrel{x \rightarrow \infty}{\approx} x^2 - 4x + 8$$

Damit $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x) = 0$ muss $\boxed{g(x) = x^2 - 4x + 8}$ sein.

Transformation Rules for Functions		
Function Notation	Type of Transformation	Change to Coordinate Point
$f(x) + d$	Vertical translation up d units	$(x, y) \rightarrow (x, y + d)$
$f(x) - d$	Vertical translation down d units	$(x, y) \rightarrow (x, y - d)$
$f(x + c)$	Horizontal translation left c units	$(x, y) \rightarrow (x - c, y)$
$f(x - c)$	Horizontal translation right c units	$(x, y) \rightarrow (x + c, y)$
$-f(x)$	Reflection over x-axis	$(x, y) \rightarrow (x, -y)$
$f(-x)$	Reflection over y-axis	$(x, y) \rightarrow (-x, y)$
$af(x)$	Vertical stretch for $ a > 1$	$(x, y) \rightarrow (x, ay)$
	Vertical compression for $0 < a < 1$	
$f(bx)$	Horizontal compression for $ b > 1$	$(x, y) \rightarrow \left(\frac{x}{b}, y\right)$
	Horizontal stretch for $0 < b < 1$	