

Analysis 1 - Übung 2

Harmonische Reihe

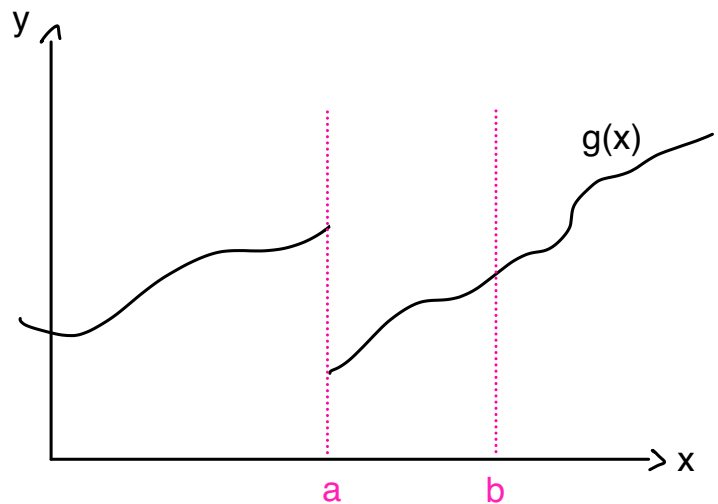
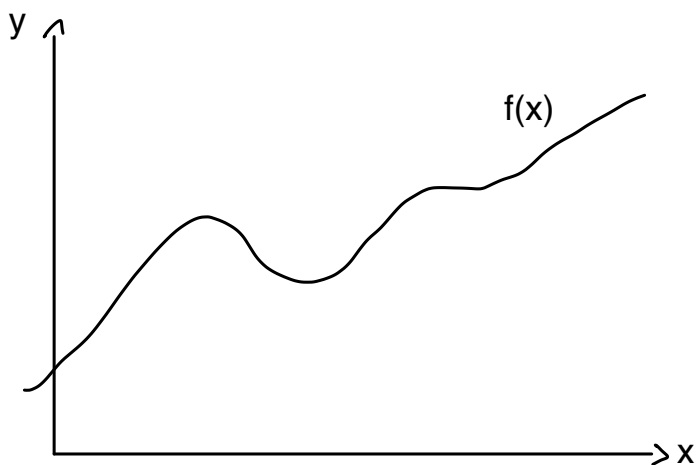
$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \infty$$

$$1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty$$

Stetigkeit

Eine Funktion ist stetig, wenn man sie mit einem Strich zeichnen kann. (Kein Sprung)

→ $f(x)$ ist stetig, $g(x)$ ist nicht stetig

→ $g(x)$ ist

• stetig in b :

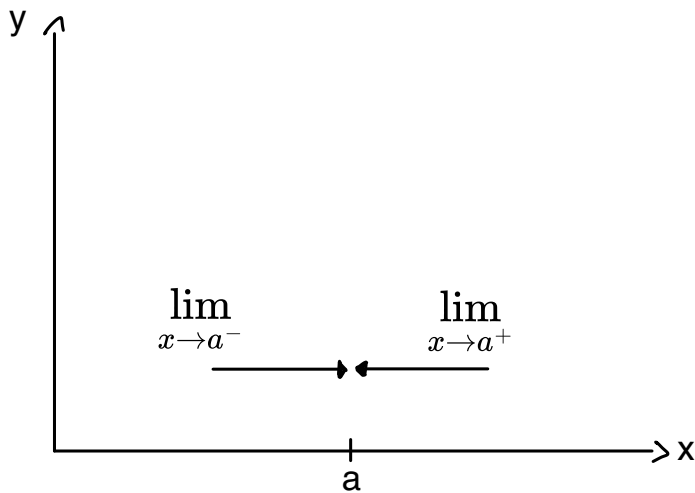
$$\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} g(x)$$

• nicht stetig in a :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$$

Grenzwerte von Funktionen (eine Auswahl von Methoden)

- Links- & Rechts-Grenzwerte und Betragssriche



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{2|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{2(x-1)} = \frac{1}{2} //$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{2|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{2(-1)(x-1)} = -\frac{1}{2} //$$

Diese Funktion ist unstetig (im Punkt $x = 1$)

- Wert einsetzen

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2} //$$

Oft resultieren aber undefinierte Ausdrücke
→ $0/0$, ∞/∞ , $0 \cdot \infty$, ...

- Brüche Faktorisieren & Kürzen

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{(x+3)\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+3} = \frac{4}{5}$$

- Brüche mit grösster Potenz kürzen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{x}}{2} = \frac{1}{2}$$

“Durch die grösste Potenz teilen”

• Wurzeln erweitern

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

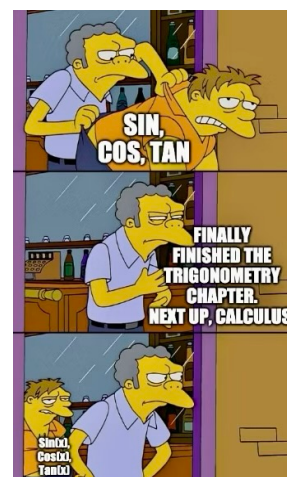
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sqrt{x+4} - 2}^a}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+4} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+4) - 4}{x(\sqrt{x+4} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$$

• Trigonometrische Funktionen (sin, cos, ...)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$$



Bsp.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(5x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x \cdot \cos(5x)} \Rightarrow \text{Substitution: } \begin{array}{l} n = 5x \quad x \rightarrow 0 \\ x = n/5 \quad n \rightarrow 0 \end{array}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin(n)}{\frac{n}{5} \cdot \cos(n)} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{5 \sin(n)}{n \cdot \cos(n)} = \lim_{n \rightarrow 0} 5 \cdot \underbrace{\frac{\sin(n)}{n}}_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos(n)}}_1 = 5 //$$

Bsp.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x})}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{x}{\sin(x)}}_1 \cdot \underbrace{x \cdot \sin(\frac{1}{x})}_A = 1 \cdot A = 1 \cdot 0 = 0 //$$

┌

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Substitution: $\begin{array}{l} u = 1/x \quad x \rightarrow 0 \\ x = 1/u \quad u \rightarrow \infty \end{array}$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\sin(u)}{u} = \boxed{0 = A}$$

└

Bernoulli L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

oder

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$



Bsp.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{0}{\sin(x)}}{\underset{0}{x}} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1 //$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{1}{\cos(x)} - \underset{0}{1}}{\underset{0}{x}} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos(x) - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{1} = 0 //$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{0}{\tan(5x)}}{\underset{0}{x}} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan(5x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \frac{1}{\cos^2(5x)}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{\cos^2(5x)} = 5 //$$

$$\tan(x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$